МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська

ТЕОРІЯ ВИЗНАЧНИКІВ. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ N-го ПОРЯДКУ
(за редакцією В. М. Мітіна)

Навчальний посібник
для студентів напрямків підготовки
«Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки»

Рекомендовано вченою
радою НТУ «ХПІ»
протокол № 10 від 22.12.2018

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

УДК 512
С 32

Рецензенти

О. Г. Нерух, доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки;

О. Г. Ніколаєв, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ»

Рекомендовано вченою радою НТУ «ХПІ»
як навчальний посібник для студентів напрямків підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки»,
протокол № 10 від 22.12.2018 р.

Сердюк І.В.

С 32 Теорія визначників. Методи обчислення визначників n-го порядку : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, — Харків : «НТМТ», 2019. — 256 с.

ISBN 978-617-578-295-8

Розглянуто методи обчислення визначників які не входять до базової програми курсу лінійної алгебри. Більшість представленого матеріалу відноситься до завдань підвищеної складності. Містить достатню кількість теоретичного матеріалу, докладно розв'язано приклади, подано вправи для самостійної роботи з відповідями.

Призначено для студентів напрямків підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки», інших технічних спеціальностей.

Бібліогр. 15

УДК 512

ISBN 978-617-578-295-8

ЗМІСТ

Вступ

Впродовж останніх років в технічних університетах України відбуваються зміни програм математичних курсів. Крім того, спостерігається зростання різноманітності програм за різними спеціальностями одного напряму. Зокрема, значно розрізняються програми з курсу «Лінійна алгебра» для студентів спеціальностей «Комп'ютерні науки» та «Прикладна математика», серед якої є групи посиленої математичної підготовки. Зміни, що відбуваються, пов'язані з необхідністю наближення до потреб інженерних дисциплін. Але, водночас, ці зміни повинні зберігати високий рівень математичних знань. У зв'язку з цим деякі методи обчислення виносяться на самостійне вивчення або зовсім відсутні в програмі курсу. До таких методів належать метод математичної індукції і метод рекурентних співвідношень. В даному посібнику автори пропонують розглянути застосування цих методів до обчислення визначників.

Пропонований посібник призначено насамперед студентам, що цікавляться математикою, так як більшість представленого матеріалу відноситься до завдань підвищеної складності. Його мета — допомогти студентам розвинути математичне мислення, набути практичних навичок.

Крім того, з метою популяризації математики серед студентів університетів регулярно в багатьох країнах проводяться математичні олімпіади. Олімпіади у цілому довели свою ефективність у пропаганді математичних знань серед молоді. Їх основне завдання є крок в ланцюзі заходів, покликаних виявити студентів, здатних до творчого мислення, і звернути на них увагу спеціальних кафедр. Оскільки, оволодіння різноманітними математичними методами і прийомами логічних міркувань є корисним не тільки при підготовці до олімпіади, а й в серйозних наукових дослідженнях, у яких застосовується математичний апарат. А як відомо, оволодіти математичним апаратом можна лише навчившись розв'язувати завдання різного рівня складності. У зв'язку з цим матеріал підібраний так, що він може бути використаний для занять зі студентами, які беруть участь в різного рівня олімпіадах з математики та програмування.

Як відомо, кращий спосіб розібратися в тій чи іншій ідеї — це розібрати розв'язану задачу і потім розв'язати самому задачу, в якій використовується ця ідея. Цьому сприяє зміст і структура посібника, в якому послідовно викладено теоретичний матеріал, докладно розв’язано різноманітні приклади, подано достатню кількість вправ для самостійної роботи з відповідями.

Підготовка студентів з поглибленим вивченням розділів вищої математики вимагає великих зусиль як для студентів, так і для викладачів. Щоб було зручно працювати треба мати значний запас завдань. Тому автори включили розділ, який містить перелік обчислених визначників, записаних в загальному вигляді. Підстановка різних числових значень замість параметрів дає можливість складати необхідну кількість різних завдань для роботи над будь-яким методом обчислень.

Навчальний матеріал збирався авторами з багатьох посібників та доповнювався самостійними розробками. Ми сподіваємося, що посібник стане в пригоді в підготовці «сильних» студентів різних технічних спеціальностей.

Автори висловлюють щиру подяку доценту кафедри комп’ютерної математики і аналізу даних Мітіну Володимиру Миколайовичу за допомогу, надану при написанні цього посібника.

§ 1. Загальні положення

1.1. Перестановки

Розглянемо деякий набір із n предметів $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для вивчення їх взаємного розміщення можна обмежитись розглядом лише номерів $1, 2, \ldots, n$. Тому будемо розглядати всі можливі перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ цих номерів. Число всіх таких перестановок дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Визначення. Пара чисел α_i, α_k із перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ утворює інверсію, якщо попереднє число з цієї пари більше наступного числа.

Число всіх інверсій в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ позначимо через $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$.

Визначення. Перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ натуральних чисел $1, 2, \ldots, n$ називається парною, якщо число $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ її інверсій – парне, і непарною, якщо $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ – непарне.

Приклад 1.01.

З'ясувати парність перестановки $2,5,1,4,7,3,6$.

Розв'язання.

$$t = [2,5,1,4,7,3,6] = 2+0+3+1+1=7.$$

Перестановка має 7 інверсій, тому вона являється непарною.

Приклад 1.02.

З'ясувати, коли перестановка $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ чисел $1, 2, \ldots, n$ буде парною.

Розв'язання.

Спочатку підрахуємо $t = [n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1]$. число n утворює інверсію зі всіма наступними числами, тобто всього $n-1$ інверсій. Далі, число $n-1$ утворює $n-2$ інверсій зі всіма наступними числами і т.д. Усього дістаємо

$$t = (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

інверсій у даній перестановці.

Парність числа t залежить від остачі при діленні n на 4:

a) якщо $n = 4k$, тоді $t = 2k(4k-1)$ — парне число;
b) якщо $n = 4k+1$, тоді $t = (4k+1)2k$ — парне число;
c) якщо $n = 4k+2$, тоді $t = (2k+1)(4k+1)$ — непарне число;

d) якщо $n=4k+3$, тоді $t=(4k+3)(2k+1)$ – непарне число.

Визначення. Якщо в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ натуральних чисел $1, 2, \ldots, n$ поміняти місцями два яких-небудь числа, тоді таке перетворення називається транспозицією.

Теорема 1. При одній транспозиції змінюється парність перестановки.

Теорема 2. Серед усіх перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ при $n>1$ число парних і непарних перестановок збігається.

З двох перестановок $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ і $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ одних і ті ж самих чисел можна скласти новий об'єкт

$$\sigma=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

який нановкою n-го степеня.

Підстановку називають парною, якщо перестановки, які входять до її складу, мають однакову парність, і непарною в протилежному випадку.

Визначення. Транспозицією підстановки називають будь-яку перестановку її стовпців.

Парність підстановки співпадає з парністю $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]+$ $+[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n]$ — загальної кількості інверсій в рядках підстановки.

1.2. Кільця і поля

Визначення. Непорожню множину K називають кільцем, якщо в ній визначено операції додавання і множення, які задовольняють законам:

I. ***Закони додавання***

1. Асоціативність: $\forall a, b, c \in K: \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$
2. Комутативність: $\forall a, b \in K: \quad a+b=b+a.$
3. Існування нульового елемента $\mathbb{0}$:

$$\exists \mathbb{0}! \in K \ \forall a \in K: \quad a+\mathbb{0}=\mathbb{0}+a=a.$$

4. Існування протилежного елемента $-a$:

$$\forall a \in K \ \exists(-a)! \in K: \quad a+(-a)=(-a)+a=\mathbb{0}.$$

II. Закони множення

5. Асоціативність: $\forall a, b, c \in K: \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

III. Закони дистрибутивності

6. $\forall a, b, c \in K: \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$

7. $\forall a, b, c \in K: \quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$

Визначення. Кільце K називається комутативним, якщо додатково до цих законів виконується закон комутативності множення:

8. $\forall a, b \in K: \quad a\cdot b=b\cdot a.$

Визначення. Полем називається комутативне кільце K, для якого додатково виконуються закони множення:

9. Існування одиничного елемента e: $\exists e!\ \forall a \in P: \quad a\cdot e=e\cdot a=a.$

10. Існування оберненого елемента a^{-1}:

$$\forall a \in P, a \neq 0\ \exists a^{-1}!: \quad a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e.$$

У полі P визначається операція ділення: якщо $a, b \in P$ і $a \neq 0$, то часткою називається елемент $c \in P$ такий, що $c=a^{-1}\cdot b=b\cdot a^{-1}$.

Приклади:

множина $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел не є ні кільцем, ні полем;

множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел є полем;

множина $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел є полем;

множина $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел є полем;

множина всіх цілих чисел, кратних заданому цілому числу m, є комутативним кільцем;

множина всіх раціональних чисел виду $\dfrac{m}{2^n}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, є комутативним кільцем.

1.3. Визначники та їх властивості

Нехай K — довільне комутативне кільце. Запишемо квадратну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

з елементами a_{ik} кільця K.

Визначення. Визначником (детермінантом) квадратної матриці A n-го порядку над кільцем K називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків

$$\det A=\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n}, \qquad (1.1)$$

яка береться за всіма можливими підстановками виду

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Число її доданків становить $n!$.

Визначник матриці A позначається так:

$$\det A \equiv |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Якщо $D_1 = \det A = \alpha_{11}$.

Якщо $n = 2$, тоді $D_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Покажемо це. При $n = 2$ із елементів матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ можна утворити лише два вказаних добутки $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$, яким відповідають підстановки

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

парна і непарна відповідно, оскільки

$$t_1 = [1, 2] + [1, 2] = 0 + 0 = 0 \text{ і } t_2 = [1, 2] + [2, 1] = 0 + 1 = 1.$$

Тому за формулою (1.1), маємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{t_1} a_{11}a_{22} + (-1)^{t_2} a_{12}a_{21} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Якщо $n = 3$, тоді $D_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Це співвідношення називається правилом Саррюса, або правилом трикутника.

Розглянемо властивості визначників.

1. ***Визначники транспонованих матриць рівні:*** $\det A = \det A^T$.

Доведення.

Запишемо $\det A$ на підставі визначення:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[1, 2, \ldots, n] + [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де $[1, 2, 3, \ldots, n] + [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ — загальна кількість інверсій у рядках підстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Якщо праворуч і ліворуч цієї тотожності замість a_{ij} всюди поставити a_{ji}, то дістанемо рівність

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n] + [1, 2, \ldots, n]} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} \cdots a_{\alpha_n n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} \cdots a_{\alpha_n n}.$$

де $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n] + [1, 2, 3, \ldots, n]$ — загальна кількість інверсій у рядках підстановки $\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Дійсно, брати добуток елементів по одному з кожного рядка і по одному з кожного стовпця вихідної матриці – теж саме, що робити це по відношенню до транспонованої матриці A^T. Тому якщо добуток $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n}$ є доданком у визначнику $\det A$, то він є доданком і в визначнику $\det A^T$ з одним і тим же множником $(-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]}$. Знак цього доданка у визначнику $\det A$ визначається підстановкою

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix},$$

у $\det A^T$ його знак визначається підстановкою

$$\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

Парності підстановок σ, τ співпадають, тому що загальне число інверсій в цих рядках дорівнює числу інверсій в перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Тому співпадають й знаки.

Із умови цієї властивості випливає твердження: всі властивості визначника, які доведені для його рядків, зберігають силу і для його стовпців.

2. ***При перестановці місцями двох будь-яких рядків (стовпців) визначник змінює свій знак на протилежний.***

Доведення.

Позначимо

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Якщо добуток $a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n}$ є доданком у визначнику Δ, то він є доданком і у визначнику Δ_1, та навпаки. Знак цього доданка в Δ визначається підстановкою

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

У Δ_1 знак того ж доданка визначається підстановкою

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Оскільки перший рядок підстановки τ отримаємо з першого рядка підстановки σ за допомогою однієї транспозиції, а другі рядки у них співпадають, ці підстановки мають різну парність. Значить, визначники Δ і Δ_1 містять однакові за абсолютною величиною доданки, але з протилежними знаками.

Наступні дві властивості означають лінійність визначника відносно елементів будь-якого його рядка (стовпця).

3. ***Якщо елементи деякого рядка (стовпця) подаються у вигляді суми двох доданків, тоді визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких елементи відміченого рядка (стовпця) дорівнюють першим доданкам, в другому – другим.***

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1}\cdots\left(b_{i\alpha_i}+c_{i\alpha_i}\right)\cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1}\cdots b_{i\alpha_i}\cdots a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1}\cdots c_{i\alpha_i}\cdots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічне твердження зберігає силу, якщо елементи деякого рядка (стовпця) подаються у вигляді суми m доданків.

4. ***Якщо всі елементи деякого фіксованого рядка (стовпця) визначника Δ помножити на елемент λ кільця K, то дістанемо новий визначник Δ_1, причому $\Delta_1 = \lambda\Delta$.***

Доведення.

Нехай, наприклад, у визначнику

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Дійсно,

$$\Delta_1 = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} \cdots \lambda a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} \cdots \lambda a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. ***Визначник Δ дорівнює нулю, якщо він має:***
   1) нульовий рядок (стовпець);
   2) принаймні два однакові рядки (стовпця) (з різними номерами);
   3) принаймні два рядки (стовпця), елементи яких пропорційні;
   4) принаймні один рядок (стовпець), елементи якого є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців).

Доведення.

1) Властивість випливає з визначення визначника. Дійсно, кожний доданок алгебраїчної суми містить по одному представнику з кожного рядка і кожного стовпця. Тому в кожному такому добутку є нуль — який-небудь елемент нульового рядка. Отже, всі доданки в сумі рівні нулю, так саме і визначник Δ.

2) Нехай у визначнику (1) є два однакові рядки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{k\alpha_k} \cdots a_{n\alpha_n} \cdot$$

Розіб'ємо суму на дві частини, які відповідають парним і непарним перестановкам:

$$\Delta = \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \\ \text{? 0@=0}}} a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{k\alpha_k} \cdots a_{n\alpha_n} - \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \\ \text{=5? 0@=0}}} a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{k\alpha_k} \cdots a_{n\alpha_n} \cdot$$

При одній транспозиції змінюється парність перестановки. Зробимо одну транспозицію (α_i, α_k) в другій сумі, тоді

$$\Delta = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\\ \text{? 0@=0}}} a_{1\alpha_1}\cdots a_{i\alpha_i}\cdots a_{k\alpha_k}\cdots a_{n\alpha_n} - \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)\\ \text{? 0@=0}}} a_{1\alpha_1}\cdots a_{i\alpha_k}\cdots a_{k\alpha_i}\cdots a_{n\alpha_n}\ .$$

Але $\alpha_{i1}=\alpha_{k1},\alpha_{i2}=\alpha_{k2},\ldots,\alpha_{in}=\alpha_{kn}$. Отже, для кожного доданка першої суми знайдеться рівний йому доданок другої суми, тому $\Delta=0$.

3) Нехай, наприклад, елементи i-го рядка пропорційні елементам k-го рядка з коефіцієнтом пропорційності λ. Тоді в силу 4) властивості загальний множник i-го рядка можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda a_{i1} & \ldots & \lambda a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & \ldots & a_{kn}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & \ldots & a_{kn}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Останній визначник дорівнює нулю, так як має два однакових рядка.

4) Нехай, наприклад, 1-й стовпець визначника Δ є лінійною комбінацією всіх стовпців, що залишились:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{1k} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{2k} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{nk} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Деякі коефіцієнти лінійної комбінації можуть бути нульовими. Це рівносильне тому, що відповідні стовпці не приймають участь у лінійної комбінації. Використовуючи властивості 3), 4) визначника, отримаємо

$$\Delta=\lambda_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+\dots+\lambda_n\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda_2 0+\dots\lambda_n 0=0,$$

де останні визначники дорівнюють нулю, тому що мають по два рівних стовпця.

6. ***Значення визначника не зміниться, якщо до деякого його рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців)***

Доведення.

В силу властивості 3) визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, один з яких дорівнює нулю в силу властивості 5). Наприклад, для 1-го стовпця визначника Δ це означає, що

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21}+\sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{2k} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}+\sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{2k} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

де $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Визначення. Виділимо у визначнику

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i-й рядок і k-й стовпець та викреслимо елементи цього рядка і стовпця. Дістанемо визначник $(n-1)$-го порядку

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він називається *мінором елемента* a_{ik}, який міститься в Δ на перетині i-го рядка і k-го стовпця.

Визначення. Добуток $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ik}.

7. ***Визначник Δ дорівнює сумі добутків елементів будь-якого виділеного рядка на їх алгебричні доповнення:***

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Аналогічний розклад має місце і для стовпців:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Доведення.

Спочатку доведемо, що

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{22} \end{vmatrix}.$$

За визначенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де $t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$. Оскільки $a_{1\alpha_1} = 0$ при $\alpha_1 > 1$, тоді

$$\det A = \sum_{(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де $t = [1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]$ і $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ – перестановка чисел $2, 3, \ldots, n$. Маємо

$$\det A = \sum_{(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n} = a_{11} \cdot \sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

де за визначенням

$$\sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} (-1)^t a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{22} \end{vmatrix}$$ – визначник $(n-1)$-го

порядку.

На підставі визначення алгебраїчного доповнення елемента маємо

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11}.$$

У загальному випадку

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{ik} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Проведемо серію елементарних перетворень. Переставляємо

i-й рядок послідовно з рядками доти, доки на досягнемо першого рядка. Потім в одержаному визначнику переставляємо k-й стовпець доти, доки він не займе місце 1-го стовпця. Отримаємо:

$$\Delta_1 = (-1)^{(i-1)+(k-1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{ik} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1k} & a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1k} & a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+1k} & a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk} & a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+k-2} \cdot a_{ik} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot M_{ik} = a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

Для доведення властивості (7) запишемо даний визначник Δ у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + 0 + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + a_{ik} + \dots + 0 & \dots & 0 + 0 + \dots + a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де кожний елемент i-го рядка має n доданків. Скористаємось властивістю лінійності визначника. Δ дорівнює сумі наступних n визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ik} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ik}A_{ik} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Звідси матимемо

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Ця властивість носить назву розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

8. ***Визначник верхнього (нижнього) трикутного виду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі, тобто***

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Доведення.

Скориставшись властивістю 7, послідовно розкладаємо визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Для обчислення визначників нижнього трикутного виду використовуємо розклад за елементами першого рядка.

9. ***Сума добутків елементів деякого рядка визначника Δ на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будь-якого іншого рядка дорівнює нулю:***

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, \ \ i \neq j \, .$$

Аналогічна властивість має місце і для стовпців:

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0, \ \ n \neq l \, .$$

Доведення.

Скориставшись властивістю 7, маємо

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i-89\ \text{@04>:} \\ \\ j-89\ \text{@04>:} \\ \\ \\ \end{array} = 0$$

(елементи двох рядків визначника однакові – властивість 5.2).

10. ***Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто***

$$\det AB = \det A \det B \, .$$

Властивість 10 буде доведено далі (див. § 3).

1.4. Елементарні перетворення визначників

При обчисленні визначника (з елементами з поля дійсних чисел) виникають певні труднощі, якщо при цьому обчисленні використовувати лише визначення. Тому треба знаходити інші методи, що базуються на властивостях визначників.

Визначення. Елементарними перетвореннями визначника Δ (з елементами a_{ik} з поля P)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаються такі перетворення:

1. Множення всіх елементів деякого фіксованого рядка визначника на будь – який скаляр $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in P$).

2. Додавання до елементів деякого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на скаляр λ.

3. Перестановка місцями двох будь – яких рядків.

Аналогічні перетворення 1, 2, 3 для стовпців також називаються елементарними.

Теорема. При елементарних перетвореннях (з рядками або стовпцями) визначника Δ одержується новий визначник Δ_1:

1) $\Delta_1 = \lambda\Delta$ при елементарному перетворенні типу 1;
2) $\Delta_1 = \Delta$ при елементарному перетворенні типу 2;
3) $\Delta_1 = -\Delta$ при елементарному перетворенні типу 3.

1.5. Основні методи обчислення визначників

1. Метод зниження порядку.
2. Метод зведення до трикутного вигляду.
3. Метод рекурентних співвідношень (отримання рекурентного співвідношення з подальшим використанням метода математичної індукції).

§ 2. Метод зведення до трикутного вигляду

Суть цього методу полягає в тому, щоб звести визначник до верхнього (нижнього) трикутного виду. Далі, використовуючи (властивість 8), обчислюємо визначник.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

***Приклад* 2.01.**

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{останній рядок віднімаємо} \\ \text{від кожного із решти ряд-} \\ \text{ків} \\ K - N \to K \\ K = 1, 2, \cdots, N - I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = (n-1)! \cdot$$

$$D_n = (n-1)!.$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.1.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (-1)^{n-1}$.

2.1.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (1-a)^{n-1}$.

2.1.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \\ 1 & 1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

$D_n = (-1)^{n-1} 2^{n-1} n\,!$.

2.1.04. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n & 1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
2.1.05. $$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_n & a_1 & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_1 & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$, $D_n = a_1 \prod_{m=2}^{n} (a_1 - a_m)$.
2.1.06. $$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (n-1)^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = \prod_{m=2}^{n} (m^2 - 1)$.

***Приклад* 2.02.**

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & xy & xy & \cdots & x \\ xy & 1 & xy & \cdots & x \\ xy & xy & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & xy & x \\ xy & 1 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix}, \quad xy \neq 1 .$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & xy & xy & \cdots & x \\ xy & 1 & xy & \cdots & x \\ xy & xy & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{останній рядок помножений на } x \\ \text{віднімемо від кожного із решти рядків} \\ K - x \cdot N \to K, \quad K = \overline{1, n-1} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-xy & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-xy & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-xy & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1-xy)^{n-1} .$$

$$D_n = (1-xy)^{n-1} .$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.2.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & \cdots & 2 \\ 4 & 1 & 4 & \cdots & 2 \\ 4 & 4 & 1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -3$, $D_3 = 9$, $D_n = (-3)^{n-1}$.

2.2.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & \cdots & 3 \\ 9 & 1 & 9 & \cdots & 3 \\ 9 & 9 & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 9 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -8$, $D_3 = 64$, $D_n = (-8)^{n-1}$.

2.2.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & \sqrt{3} \\ 3 & 1 & 3 & \cdots & \sqrt{3} \\ 3 & 3 & 1 & \cdots & \sqrt{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \sqrt{3} \\ 3 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -2$, $D_3 = 4$, $D_n = (-2)^{n-1}$.

2.2.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^2 & \cdots & x \\ x^2 & 1 & x^2 & \cdots & x \\ x^2 & x^2 & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x^2 & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1 - x^2$, $D_3 = \left(1 - x^2\right)^2$, $D_n = \left(1 - x^2\right)^{n-1}$.

2.2.05. $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \cdots & \sqrt{5} \\ 5 & 1 & 5 & \cdots & \sqrt{5} \\ 5 & 5 & 1 & \cdots & \sqrt{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 5 & \sqrt{5} \\ 5 & 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=-4$, $D_3=16$, $D_n=(-4)^{n-1}$.
2.2.06. $$D_n=\begin{vmatrix} xy & 1 & 1 & \cdots & x \\ 1 & xy & 1 & \cdots & x \\ 1 & 1 & xy & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & xy \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} xy & 1 & x \\ 1 & xy & x \\ y & y & xy \end{vmatrix}$, $D_1=xy$, $D_2=xy(xy-1)$, $D_3=xy(xy-1)^2$, $D_n=xy(xy-1)^{n-1}$.

***Приклад* 2.03.**

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_n & xy & xy & \cdots & x \\ xy & a_{n-1} & xy & \cdots & x \\ xy & xy & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_3 & xy & x \\ xy & a_2 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & x \\ y & 1 \end{vmatrix} = a_2 - xy$.

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & xy & x \\ xy & a_2 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I - x \cdot III \to I \\ II - x \cdot III \to II \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 - xy & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - xy & 0 \\ y & y & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_3 - xy) \cdot (a_2 - xy). \quad D_3 = (a_3 - xy) \cdot (a_2 - xy).$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a_n & xy & xy & \cdots & x \\ xy & a_{n-1} & xy & \cdots & x \\ xy & xy & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{останній рядок помно-} \\ \text{жений на } x \text{ відніме-} \\ \text{мо від кожного із} \\ \text{решти рядків} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n - xy & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-} - xy & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} - xy & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{m=2}^{n} (a_m - xy).$$

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} (a_m - xy).$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.3.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} \sqrt{n} & 2 & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{n-1} & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & \sqrt{n-2} & \cdots & \sqrt{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=\sqrt{2}-2$, $D_3=\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)$,

$D_n=\prod\limits_{m=2}^{n}\left(\sqrt{m}-2\right)$.

2.3.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & 2n-3 & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & 2n-5 & \cdots & \sqrt{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 5 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=1$, $D_3=3$, $D_n=(2n-3)!!$, $(n>1)$.

2.3.03.

$$D_n=\begin{vmatrix} 3n+1 & 4 & 4 & \cdots & 2 \\ 4 & 3n-2 & 4 & \cdots & 2 \\ 4 & 4 & 3n-5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=3$, $D_3=18$, $D_n=3^{n-1}(n-1)!$, $n>1$.

2.3.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n+2 & 6 & 6 & \cdots & 3 \\ 6 & 4n-2 & 6 & \cdots & 3 \\ 6 & 6 & 4n-6 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 14 & 6 & 3 \\ 6 & 10 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 4$, $D_3 = 32$, $D_n = 4^{n-1}(n-1)!$.

2.3.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} -n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & =2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -3$, $D_3 = 12$, $D_n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)!}{2}$, $n > 1$.

2.3.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^{n-1} & 3 & 3 & \cdots & \sqrt{3} \\ 3 & 2^{n-2} & 3 & \cdots & \sqrt{3} \\ 3 & 3 & 2^{n-3} & \cdots & \sqrt{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \sqrt{3} \\ 3 & 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -1$, $D_3 = 1$, $D_n = \prod_{m-2}^{n}\left(2^{m-1} - 3\right)$.

***Приклад* 2.04.**

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = 1 = \dfrac{2!}{2}$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \left| I + II \to I \right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 = \dfrac{3!}{2}$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I + III \to I \\ II + III \to II \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 1 = \dfrac{4!}{2}$.

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & n-1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & n-2 & \ldots & -1 & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{останній рядок додаємо до} \\ \text{кожного з решти рядків} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & n-1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2}=\frac{(n+1)!}{2}.$$

$$D_n=\frac{(n+1)!}{2}.$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.4.01. $$D_n=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2 & \cdots & -2\\ 1 & 1 & -2 & \cdots & -2\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$, $D_n=3^{n-1}$.
2.4.02. $$D_n=\begin{vmatrix}1 & -n & -n & \cdots & -n\\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1-n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & -3\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$, $D_n=\frac{(n+1)!}{2}$.
2.4.03. $$D_n=\begin{vmatrix}1 & 3-2n & 5-2n & \cdots & -1\\ 2n-1 & 1 & 5-2n & \cdots & -1\\ 2n-1 & 2n-3 & 1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ 5 & 1 & -1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}$, $D_n=2^{n-1}n!$.

2.4.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \\ 0 & a_1 & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & -a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & a_1 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$, $D_n = a_1 \prod_{m=2}^{n} (a_1 + a_m)$.

2.4.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & (n-1)^2 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & (n-2)^2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = \prod_{m=2}^{n} (m^2 + 1)$.

2.4.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 2n-3 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 2n-5 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = 2^{n-1} n!$.

Приклад 2.05.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{додамо до першого рядка ре-}\\ \text{шту рядків}\\ I+\sum\limits_{K=2}^{n}K\to I\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} na+b & na+b & na+b & \cdots & na+b \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{винесемо спільний множин-}\\ \text{ник з першого рядка за знак}\\ \text{визначника}\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{віднімемо від кожного рядка пер-}\\ \text{ший рядок, помножений на } a\\ K-a\cdot I\to K\\ K=2,3,\cdots,n\end{array}\right|=(na+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}=$$

$$=(na+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(na+b)\cdot b^{n-1}.$$

$$D_n=(na+b)\cdot b^{n-1}.$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.5.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_n = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}$.

2.5.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n = n+1$.

2.5.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $D_n = (2n+3)\cdot 3^{n-1}$.

2.5.04. $$D_n=\begin{vmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & 3^{n-1} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2}+1 & 3^{n-2} & \cdots & 3^{n-2} \\ 3^{n-3} & 3^{n-3} & 3^{n-3}+1 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 10 & 9 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n=\dfrac{3^n+1}{2}$.
2.5.05. $$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-2 & n-2 & n-1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n=\dfrac{n(n+1)+2}{2}$.
2.5.06. $$D_n=\begin{vmatrix} a_n+1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1}+1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} a_3+1 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2+1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1+1 \end{vmatrix}$, $D_n=1+\sum_{m=1}^{n} a_m$.

Приклад 2.06.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2 + b & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 + b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + b$

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b & a_2 \\ a_1 & a_1 + b \end{vmatrix} = \left| \ I + II \to I \ \right| = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + b & a_1 + a_2 + b \\ a_1 & a_1 + b \end{vmatrix} =$

$$= (a_1 + a_2 + b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_1 + b \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \ II - a \cdot I \to II \ \right| = (a_1 + a_2 + b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + b) \cdot b \ .$$

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2 + b & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 + b \end{vmatrix} = \left| \ I + \sum_{K=2}^{3} K \to I \ \right| =$

$$= \begin{vmatrix} b + \sum_{m=1}^{3} a_m & b + \sum_{m=1}^{3} a_m & b + \sum_{m=1}^{3} a_m \\ a_2 & a_2 + b & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 + b \end{vmatrix} =$$

$$=\left(b+\sum_{m=1}^{3}a_m\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_2 & a_2+b & a_2\\ a_1 & a_1 & a_1+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}II-a_2\cdot I\to II\\ III-a_1\cdot I\to III\end{vmatrix}=$$

$$=\left(b+\sum_{m=1}^{3}a_m\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b\end{vmatrix}=\left(b+\sum_{m=1}^{3}a_m\right)\cdot b^2.$$

Загальний випадок.

$$\text{*n.}\quad D_n=\begin{vmatrix}a_n+b & a_n & a_n & \cdots & a_n\\ a_{n-1} & a_{n-1}+b & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\text{додамо до першого рядка}\\ \text{решту рядків}\\ I+\sum_{K=2}^{n}K\to I\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}b+\sum_{m=1}^{n}a_m & b+\sum_{m=1}^{n}a_m & b+\sum_{m=1}^{n}a_m & \cdots & b+\sum_{m=1}^{n}a_m\\ a_{n-1} & a_{n-1}+b & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+b\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\text{винесемо спільний множин-}\\ \text{ник з першого рядка за знак}\\ \text{визначника}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(b+\sum_{m=1}^{n}a_m\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-1}+b & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+b \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} K-a_{n+1-K}\cdot I\to K \\ K=2,3,\cdots,n. \end{vmatrix}=$$

$$=\left(b+\sum_{m=1}^{n}a_m\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=\left(b+\sum_{m=1}^{n}a_m\right)\cdot b^{n-1}.$$

Отже,

$$D_n=\left(b+\sum_{m=1}^{n}a_m\right)\cdot b^{n-1}.$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.6.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-2 & n-2 & n-1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=4$, $D_3=7$, $D_n=1+\sum_{m=1}^{n}m=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

2.6.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n+1 & 2n & 2n & \cdots & 2n \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-3 & \cdots & 2n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=7$, $D_3=13$, $D_n=1+2\sum_{m=1}^{n} m=n^2+n+1$.

2.6.03.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 2n-2 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 2n-4 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=5$, $D_3=10$, $D_n=1+\sum_{m=1}^{n}(2m-1)=n^2+1$.

2.6.04.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 2n-4 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 2n-6 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1=0$, $D_2=-3$, $D_3=8$, $D_n=(-1)^{n-1}\cdot(n^2-1)$.

2.6.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^n+1 & 2^n & 2^n & \cdots & 2^n \\ 2^{n-1} & 2^{n-1}+1 & 2^{n-1} & \cdots & 2^{n-1} \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 2^{n-2}+1 & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 7$, $D_3 = 15$, $D_n = 2^{n+1} - 1$.

2.6.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3^n+1 & 3^n & 3^n & \cdots & 3^n \\ 3^{n-1} & 3^{n-1}+1 & 3^{n-1} & \cdots & 3^{n-1} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2}+1 & \cdots & 3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 28 & 27 & 27 \\ 9 & 10 & 9 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 13$, $D_3 = 40$, $D_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

2.6.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2-1 & n^2 & \cdots & n^2 \\ (n-1)^2 & (n-1)^2-1 & \cdots & (n-1)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -4$, $D_3 = 13$,

$$D_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 1 \right).$$

2.6.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} n^3+1 & n^3 & \cdots & n^3 \\ (n-1)^3 & (n-1)^3+1 & \cdots & (n-1)^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 28 & 27 & 27 \\ 8 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 10$, $D_3 = 37$, $D_n = 1 + \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Варіанти a_n та b_n використовують для побудови визначника.

Приклад 2.07.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

де $b_1 = 0$; $D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1$

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \left| I - \dfrac{a_2}{a_1} \cdot II \to I \right| = \begin{vmatrix} b_2 & 0 \\ a_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2$.

$$*3.\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I - \dfrac{a_3}{a_1}\cdot III \to I \\ II - \dfrac{a_2}{a_1}\cdot III \to II \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 .$$

Загальний випадок.

$$*n.\quad D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} I - \dfrac{a_n}{a_1}\cdot N \to I \\ II - \dfrac{a_{n-1}}{a_1}\cdot N \to II \\ \cdots\cdots \;\; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (N-I) - \dfrac{a_2}{a_1}\cdot N \to (N-I) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n .$$

Отже,

$$D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m .$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.7.01.

$$a_n = n, \quad b_n = n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & 2n-3 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-2 & n-2 & 2n-5 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_n = (n-1)!$.

2.7.02.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 3n-5 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 3n-8 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_n = (n-1)!$.

2.7.03.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 2n-2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 4n-7 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 4n-11 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 8$, $D_n = 2^{n-1}(n-1)!$.

2.7.04.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 3n-3\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5n-4 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 5n-9 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 5n-14 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 18$, $D_n = 3^{n-1}(n-1)!$.

2.7.05.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 1-n\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & n-2 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -1$, $D_3 = 2$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$.

2.7.06.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 2-2n\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 1 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 1 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -2$, $D_3 = 8$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!$.

Приклад 2.08.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}, \text{ де } b_1 = 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1$

*2. $$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot II \to I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_3}{a_1} \cdot III \to I \\ II - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot III \to II \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 .$$

Загальний випадок.

$$*\text{n}. \quad D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_n}{a_1} \cdot N \to I \\ II - \dfrac{b_{n-1}}{a_1} \cdot N \to II \\ \cdots\cdots \;\; \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (N - I) - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot N \to (N - I) \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} - b_{n-1} & a_{n-2} - b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2} - b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n . \quad D_n = \prod_{m=1}^{n} a_m .$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.8.01.

$$a_n = n , \quad b_n = n - 1 ,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & 2n-3 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{array}{l} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{array} \quad D_n = n\,! .$$

2.8.02.

$$a_n = n+1\,,\quad b_n = n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n & n & n-1 & \cdots & 2 \\ n-1 & 2n-2 & n-1 & \cdots & 2 \\ n-1 & n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 6, \\ D_3 = 24. \end{matrix} \qquad D_n = (n+1)\,!\,.$$

2.8.03.

$$a_n = 3n-2\,,\quad b_n = n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ n-1 & 4n-7 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & 4n-11 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 4, \\ D_3 = 28. \end{matrix} \qquad D_n = \prod_{m=1}^{n} (3m-2)\,.$$

2.8.04.

$$a_n = 2n-1\,,\quad b_n = 2n-2\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-2 & 4n-7 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-2 & 2n-4 & 4n-11 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-2 & 2n-4 & 2n-6 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 3, \\ D_3 = 15. \end{matrix} \qquad D_n = (2n-1)\,!!\,.$$

2.8.05.

$$a_n = n\,,\quad b_n = n^2 - 1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2-1 & n^2-n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2-1 & n^2-2n & n^2-3n+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-1 & n^2-2n & n^2-4n+3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{matrix}$ $\quad D_n = n\,!$.

2.8.06.

$$a_n = n\,,\quad b_n = n^2 - n\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2-n & (n-1)^2 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2-n & n^2-3n+2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-n & n^2-3n+2 & n^2-5n+6 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{matrix}$ $\quad D_n = n\,!$.

Приклад 2.09.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання **.**

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1$

*2. . $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot II \to I \end{array} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot (a_2 - b_2)$$

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_3}{a_1} \cdot III \to I \\ II - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot III \to II \end{array} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} a_3 - b_3 & a_2 - b_2 & a_{1n} \\ 0 & a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{3} (a_m - b_m) .$$

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ I - \dfrac{b_n}{a_1} \cdot N \to I \\ II - \dfrac{b_{n-1}}{a_1} \cdot N \to II \\ \dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (N - I) - \dfrac{b_2}{a_1} \cdot N \to (N - I) \end{array} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} a_n - b_n & a_{n-1} - b_{n-1} & a_{n-2} - b_{n-2} & \dots & a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & a_{n-1} - b_{n-1} & a_{n-2} - b_{n-2} & \dots & a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_{n-2} - b_{n-2} & \dots & a_2 - b_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 - b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} (a_m - b_m) .$$

Отже, $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} (a_m - b_m)$.

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.9.01. $$a_n = n, \quad b_n = n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{cases}$ $D_n = 1$.
2.9.02. $$a_n = n, \quad b_n = n+1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = 1. \end{cases}$ $D_n = (-1)^{n-1}$.
2.9.03. $$a_n = 2n-1, \quad b_n = n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{cases}$ $D_n = n!$.

2.9.04. $$a_n = 2n+1, \quad b_n = n+1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 3, \\ D_2 = 6, \\ D_3 = 18. \end{cases}$ $D_n = 3 \cdot n!$.
2.9.05. $$a_n = 3n-2, \quad b_n = n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ n-1 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = 3, \\ D_3 = 15. \end{cases}$ $D_n = (2n-1)!!$.
2.9.06. $$a_n = 3n-2, \quad b_n = 2n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 2. \end{cases}$ $D_n = (n-1)!$.

Приклад 2.10.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$D_n = \begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями} \\ II - \dfrac{a_{n-1}}{b_n} \cdot I \to II \\ III - \dfrac{a_{n-2}}{b_n} \cdot I \to III \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N - \dfrac{a_1}{b_n} \cdot I \to N \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & b_{n-1} - a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & b_{n-1} - a_{n-1} & b_{n-2} - a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} - a_{n-1} & b_{n-2} - a_{n-2} & \cdots & b_1 - a_1 \end{vmatrix} = b_n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(b_m - a_m \right).$$

Отже,

$$D_n = b_n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(b_m - a_m \right).$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.10.01.

$$a_n = n, \quad b_n = n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{cases} D_1 = 2, \\ D_2 = 3, \\ D_3 = 4. \end{cases}$$

$D_n = n+1$.

2.10.02.

$$a_n = n, \quad b_n = n+2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+2 & n+1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+2 & n+1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+2 & n+1 & n & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{cases} D_1 = 3, \\ D_2 = 8, \\ D_3 = 20. \end{cases}$$

$D_n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$.

2.10.03.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = 4. \end{cases}$ $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)\cdot(n-1)!\,.$

2.10.04.

$$a_n = 2n+1, \quad b_n = n+1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & 3 \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 2, \\ D_2 = -3, \\ D_3 = 8. \end{cases}$ $D_n = (-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot(n-1)!\,.$

2.10.05.

$$a_n = n, \quad b_n = 3n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 3n-1 & 3n-4 & n-2 & \cdots & 1 \\ 3n-1 & 3n-4 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n-1 & 3n-4 & 3n-7 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 2, \\ D_2 = 5, \\ D_3 = 24. \end{cases}$ $D_n = (3n-1)\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(2m-1)\,.$

2.10.06.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{cases} D_1 = 3, \\ D_2 = 10, \\ D_3 = 28. \end{cases} \quad D_n = (2n+1)\cdot 2^{n-1}.$$

Приклад 2.11.

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ an-a & a+b & a & \cdots & a \\ 0 & an-2a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ 2a & a+b & a \\ 0 & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ an-a & a+b & a & \dots & a & a \\ 0 & an-2a & a+b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{додамо до останнього} \\ \text{рядка рядки, що за-} \\ \text{лишилися} \\ N + \sum_{K=1}^{n-1} K \to N \end{array} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ an-a & a+b & a & \dots & a & a \\ 0 & an-2a & a+b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ na+b & na+b & na+b & \dots & na+b & na+b \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний множин-} \\ \text{ник з остннього рядка за} \\ \text{знак визначника} \end{array} \right| =$$

$$= (na+b) \cdot \begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ an-a & a+b & a & \dots & a & a \\ 0 & an-2a & a+b & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{останній рядок помно-} \\ \text{жений на } a\text{, віднімемо} \\ \text{від кожного} \\ \text{з рядків, що залиши-} \\ \text{лися} \\ K - a \cdot N \to K, \\ K = 1, 2, \cdots, n-1 \end{array} \right| =$$

$$=(na+b)\cdot\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ na-2a & b & 0 & \cdots & 0 \\ -a & na-3a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(na+b)\cdot b^{n-1}.$$

$D_n=(na+b)\cdot b^{n-1}$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.11.01. $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_n=(n-1)\cdot(-1)^{n-1}$.
2.11.02. $$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-2 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$.

2.11.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3n-3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3n-6 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

$D_n = 3n+1$.

2.11.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ n-1 & n+1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & n-2 & n & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

$D_n = (2n+1)\cdot n!$.

2.11.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n+2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ n-1 & 3n-1 & 4 & \cdots & 4 \\ 0 & n-2 & 3n-4 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$,

$D_n = (4n+1)\cdot \prod_{m=3}^{n}(3m-2)$.

2.11.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+4 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ n-1 & n+3 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & n-2 & n+2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$

$$D_n = (2n+3)\cdot\frac{(n+2)!}{6}.$$

***Приклад* 2.12.**

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & d \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ c & c & d \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$.

*1. $D_1 = d$

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \left| II - \frac{c}{a} I \to II \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{vmatrix} = a\left(d - \frac{bc}{a}\right).$

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ c & c & d \end{vmatrix} = \left| III - \frac{c}{a}\sum_{K=1}^{2} K \to III \right| = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d - 2b\frac{c}{a} \end{vmatrix} = a^2\left(d - 2\frac{bc}{a}\right).$

Загальний випадок.

$$*\text{n}.\quad D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & d \end{vmatrix} = \left| N - \frac{c}{a}\sum_{K=1}^{n-1} K \to N \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d - \frac{bc}{a}(n-1) \end{vmatrix} = a^{n-1}\left(d - (n-1)\frac{bc}{a}\right).$$

$$D_n = a^{n-1}\left(d - (n-1)\frac{bc}{a}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.12.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & d-c \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c & c & d-c \end{vmatrix}$,

$D_n = d - cn$.

2.12.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = \left(1 - \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m}\right) \cdot n\,!$.

2.12.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_n = 3^{n-2}(10-n)$.

2.12.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ c_3 & c_2 & a_1 \end{vmatrix}$,

$$D_n = \left(a_1 - \sum_{m=2}^{n} \frac{b_m c_m}{a_m}\right) \cdot \prod_{m=2}^{n} a_m .$$

2.12.10.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

$D_n = 2^{n-2}(n+3)$.

2.12.12.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 3^{n-2} & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 3^{n-3} & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

$D_n = 3^{\frac{n^2-3n+2}{2}} \cdot \dfrac{3^n - 1}{2}$.

§ 3. Теорема про множення визначників

Нехай $A=\left(a_{ij}\right)_1^n$, $B=\left(b_{ij}\right)_1^n$ та $C=\left(c_{ij}\right)_1^n$ — квадратні матриці n-го порядку, і $C=AB$. Тоді $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$,

$$C=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1ik}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Властивість визначників 10 має назву: теорема про множення визначників.

Теорема (про множення визначників)

Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто

$$\det AB=\det A\det B.$$

Доведення

$$\det AB=\det C=\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1ik}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{розкладаємо}\\ \text{за елемента-}\\ \text{ми 1-го рядка}\end{array}\right|=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{k_1 1} & a_{1k_1}b_{k_1 2} & \cdots & a_{ik_1}b_{k_1 m} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{розкладаємо}\\ \text{послідовно за}\\ \text{елементами}\\ \text{інших рядків}\end{array}\right|=$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_1} b_{k_1 2} & \cdots & a_{ik_1} b_{k_1 m} \\ a_{2k_2} b_{k_2 1} & a_{2k_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{2k_2} b_{k_2 n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{nk_n} b_{k_n 1} & a_{nk_n} b_{k_n 2} & \cdots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Спільний множник кожного рядка виносимо за знак визначника:

$$\det AB = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \cdots & b_{k_1 m} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & \cdots & b_{k_2 n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & \cdots & b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Якщо $k_i = k_j, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$, то визначник $\begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \cdots & b_{k_1 m} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & \cdots & b_{k_2 n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & \cdots & b_{k_n n} \end{vmatrix}$ дорівнює нулю, оскільки його i-ий та j-ий рядки співпадуть (властивість 5.2).

$$\det AB = \sum_{\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}} a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \cdots & b_{k_1 m} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & \cdots & b_{k_2 n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & \cdots & b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Нехай $K = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ — довільна перестановка, r_K — число її інверсій. За допомогою числа r_K транспозицій перестановка $K = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ перетворюється в послідовність $(1, 2, \ldots, n)$. Таким чином

$$H(K) = \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \cdots & b_{k_1 m} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & \cdots & b_{k_2 n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & \cdots & b_{k_n n} \end{vmatrix} = (-1)^{r_K} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{r_K} \cdot \det B.$$

Отже,

$$\det AB = \sum_K a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot (-1)^{r_K} \cdot \det B =$$

$$= \det B \cdot \sum_K (-1)^{r_K} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} = \det A \det B.$$

$$\det AB = \det A \det B .$$

Теорему доведено.

***Приклад* 3.1**

Нехай $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ — деякий набір елементів числового поля K.

Квадратна матриця $W(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$

називається *матрицею Вандермонда*.

Визначник Вандермонда дорівнює $|\, W \,| = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$.

Використовуючи той самий набір чисел $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$, але інше правило, побудуємо матрицю $C = (c_{ij})_1^n$:

$$C(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називається *циркулянтом*.

Для обчислення циркулянта вводимо многочлен $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$. Для побудови матриці Вандермонда візьмемо повний набір $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n)$ коренів рівняння $x^n = 1$. При цьому $f(\varepsilon_m) = a_1 + a_2 \varepsilon_m + a_3 \varepsilon_m^2 + \cdots + a_n \varepsilon_m^{n-1}$, $m = \overline{1, n}$. Скористаємося теоремою про множення визначників

$$|\, C \,| \cdot |\, W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n) \,| = |\, CW \,| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_N^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\alpha_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} =$$

$$= f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot f(\varepsilon_3) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n) \cdot |\, W \,| .$$

Звідки, $|\, C \,| \cdot |\, W \,| = f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n) \cdot |\, W \,|$. Внаслідок скорочення на $|\, W \,| \neq 0$, дістаємо рівність: $|\, C \,| = f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n)$.

Приклад 3.02.

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-2} & c_1 b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & a_2 & 0 \\ c_2 b & c_2 & a_1 \\ c_1 b^2 & c_1 b & c_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Символ «*», присутній в полі визначника, позначає нейтральний елемент визначника, тобто сукупність елементів, значення яких не впливає на значення визначника.

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = c_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} c_2 & a_1 \\ c_1 b & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{c_1}{c_2} b & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & a_1 \\ c_1 b & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & a_1 \\ 0 & c_1 - \dfrac{c_1 a_1}{c_2} b \end{vmatrix} = c_1 \cdot (c_2 - ab)$.

$$*3.\ D_3=\begin{vmatrix} c_3 & a_2 & 0 \\ c_2 b & c_2 & a_1 \\ c_1 b^2 & c_1 b & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{c_2}{c_3}b & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_1}{c_2}b & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & a_2 & 0 \\ c_2 b & c_2 & a_1 \\ c_1 b^2 & c_1 b & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_3 & * & * \\ 0 & c_2-\dfrac{c_2 a_2}{c_3}b & * \\ 0 & 0 & c_1-\dfrac{c_1 a_1}{c_2}b \end{vmatrix} = c_1\cdot\left(c_2-a_1 b\right)\cdot\left(c_3-a_2 b\right).$$

Загальний випадок.

$$*\mathrm{n}.\ D_n=\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-2} & c_1 b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{c_{n-1}}{c_n}b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}b & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-2} & c_1 b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} c_n & * & * & \cdots & * \\ 0 & c_{n-1}-\dfrac{c_{n-1}}{c_n}a_{n-1}b & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c_{n-2}-\dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}a_{n-2}b & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1-\dfrac{c_1}{c_2}a_1b \end{vmatrix}=c_1\prod_{m=2}^{n}\left(c_m-a_{m-1}b\right).$$

$$D_n=c_1\prod_{m=2}^{n}\left(c_m-a_{m-1}b\right).$$

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

3.2.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-a & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & a \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_n=(1-a)^{n-1}.$$

3.2.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$D_n = (-1)^{n-1}$.

3.2.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1-a & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$D_n = (1-a)^{n-1}$.

3.2.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & bc & c^2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2}c & b^{n-3}c^2 & \cdots & c^{n-1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b & c & a \\ b^2 & bc & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & bc & c^2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2}c & b^{n-3}c^2 & \cdots & c^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & c & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c-ab & * & * & \cdots & * \\ 0 & c^2-ab & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c^3-ab & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c^n \end{vmatrix}, \quad D_n \cdot c^n = c^n \cdot \prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m - ab\right).$$

$$D_n = \prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m - ab\right).$$

3.2.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} c^{n-1} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ bc^{n-2} & c^{n-2} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ b^2c^{n-3} & bc^{n-3} & c^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c^2 & a_2 & 0 \\ bc & c & a_1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & c & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^{n-1} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ bc^{n-2} & c^{n-2} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ b^2c^{n-3} & bc^{n-3} & c^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} c^n & * & * & \cdots & * \\ 0 & c^{n-1}-a_{n-1}b & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c^{n-2}-a_{n-2}b & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a_1b \end{vmatrix}. \quad D_n\cdot c^n = c^n\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m-a_mb\right)$$

$$D_n=\prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m-a_mb\right).$$

3.2.06.

$$D_n=\begin{vmatrix} c^{n-1} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c^{n-2} & c^{n-2} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c^{n-3} & c^{n-3} & c^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} c^2 & a_2 & 0 \\ c & c & a_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & c & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c^{n-1} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c^{n-2} & c^{n-2} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c^{n-3} & c^{n-3} & c^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} c^n & * & * & \cdots & * \\ 0 & c^{n-1}-a_{n-1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c^{n-2}-a_{n-2} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a_1 \end{vmatrix}. \quad D_n\cdot c^n = c^n\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m-a_m\right).$$

$$D_n=\prod_{m=1}^{n-1}\left(c^m-a_m\right).$$

Приклад 3.03.

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n + x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1}y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1} + x_{n-2}y_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2}y_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2} + x_{n-3}y_{n-3}z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = x_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} x_2 + x_1y_1z_1 & x_1y_1 \\ x_1z_1 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} = x_2x_1$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} x_3 + x_2y_2z_2 & x_2y_2 & 0 \\ x_2z_2 & x_2 + x_1y_1z_1 & x_1y_1 \\ 0 & x_1z_1 & x_1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_2 & 0 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & 0 \\ 0 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = x_3x_2x_1.$$

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} x_n + x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1}y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1} + x_{n-2}y_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2}y_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2} + x_{n-3}y_{n-3}z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & y_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{n} x_m.$$

$$D_n = \prod_{m=1}^{n} x_m .$$

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

3.3.01.

$$x_n = 1, \quad y_n = n+1, \quad z_n = n+1.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & (n-1)^2+1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & (n-2)^2+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$.

3.3.02.

$$x_n = 1, \quad y_n = \sqrt{n}, \quad z_n = \sqrt{n}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & \sqrt{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{n-1} & n-1 & \sqrt{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{n-2} & n-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$.

3.3.03.

$$x_n = n^2+n, \quad y_n = \frac{1}{n+1}, \quad z_n = \frac{1}{n}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+n+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & n^2-n+1 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & n^2-3n+3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \dfrac{\left[(n+1)!\right]^2}{n+1}$.

3.3.04. $$x_n\,,\quad y_n=\frac{v_n}{x_n}\,,\quad z_n=1.$$ $$D_n=\begin{vmatrix} x_n+v_{n-1} & v_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{n-1} & x_{n-1}+v_{n-2} & v_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-2} & x_{n-2}+v_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} x_3+v_2 & v_2 & 0 \\ x_2 & x_2+v_1 & v_1 \\ 0 & x_1 & x_1 \end{vmatrix}.$$ # $D_n=\prod_{m=1}^{n} x_m$.
3.3.05. $$x_n=2n-1\,,\quad y_n=\frac{n}{x_n}\,,\quad z_n=1.$$ $$D_n=\begin{vmatrix} 3n-2 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-3 & 3n-5 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-5 & 3n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_n=(2n-1)!!$.
3.3.06. $$x_n=2n-1\,,\quad y_n=\frac{n^2+n}{x_n}\,,\quad z_n=1,$$ $$D_n=\begin{vmatrix} n^2+n-1 & n^2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-3 & n^2-n-1 & n^2-3n+2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-5 & n^2-3n+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} 11 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_n=(2n-1)!!$.

Приклад 3.04.

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{n} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_3+x_2+x_1 & x_2+x_1 & x_1 \\ x_2+x_1 & x_2+x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = x_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} x_2 + x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_2 x_1$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} x_3+x_2+x_1 & x_2+x_1 & x_1 \\ x_2+x_1 & x_2+x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_3 x_2 x_1$$

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{n} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} =$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{n} x_m .$$

$x_n = a_n - a_{n-1} = n, \quad x_1 = a_1 = 1$.

Припустивши, що $\begin{cases} x_1 = a_1; \\ x_m = a_m - a_{m-1}; \end{cases}$ $m > 1$, після підстановки дістанемо визначник $D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$, $D_n = a_1 \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1})$.

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

3.4.01.

$$a_n = n, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = 1, \quad x_1 = a_1 = 1.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$.

3.4.02.

$$a_n = 3n-2, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = 3, \quad x_1 = a_1 = 1.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-5 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ 3n-5 & 3n-5 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ 3n-7 & 3n-7 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 3^{n-1}$.

3.4.03.

$$a_n = 5n-4\,, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = 5, \quad x_1 = a_1 = 1\,.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5n-4 & 5n-9 & 5n-14 & \cdots & 1 \\ 5n-9 & 5n-9 & 5n-14 & \cdots & 1 \\ 5n-14 & 5n-14 & 5n-14 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 5^{n-1}$.

3.4.04.

$$a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\,, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = n, \quad x_1 = a_1 = 1\,.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n\cdot(n+1)}{2} & \frac{n\cdot(n-1)}{2} & \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} & \cdots & 1 \\ \frac{n\cdot(n-1)}{2} & \frac{n\cdot(n-1)}{2} & \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} & \cdots & 1 \\ \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} & \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} & \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = n\,!$.

3.4.05.

$$a_n = n^2\,, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = 2n-1, \quad x_1 = a_1 = 1\,.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ (n-1)^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ (n-2)^2 & (n-2)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (2n-1)\,!!$.

3.4.06.

$$a_n = \frac{2n-1}{n}, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n\cdot(n-1)}, \quad x_1 = a_1 = 1 .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{2n-1}{n} & \frac{2n-3}{n-1} & \frac{2n-5}{n-2} & \cdots & 1 \\ \frac{2n-3}{n-1} & \frac{2n-3}{n-1} & \frac{2n-5}{n-2} & \cdots & 1 \\ \frac{2n-5}{n-2} & \frac{2n-5}{n-2} & \frac{2n-5}{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = \frac{n}{(n\,!)^2}$.

3.4.07.

$$a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = \frac{1}{(2n-3)\cdot(2n-1)}, \quad x_1 = a_1 = 1 .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{3n-2}{2n-1} & \frac{3n-5}{2n-3} & \frac{3n-8}{2n-5} & \cdots & 1 \\ \frac{3n-5}{2n-3} & \frac{3n-5}{2n-3} & \frac{3n-8}{2n-5} & \cdots & 1 \\ \frac{3n-8}{2n-5} & \frac{3n-8}{2n-5} & \frac{3n-8}{2n-5} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = \frac{2n-1}{\left[(2n-1)\,!!\right]^2}$.

3.4.08.

$$a_n = 2^n - 1, \quad x_n = a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}, \quad x_1 = a_1 = 1.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^n - 1 & 2^{n-1} - 1 & 2^{n-2} - 1 & \cdots & 1 \\ 2^{n-1} - 1 & 2^{n-1} - 1 & 2^{n-2} - 1 & \cdots & 1 \\ 2^{n-2} - 1 & 2^{n-2} - 1 & 2^{n-2} - 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$.

Приклад 3.05.

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} & \cdots & x_n + x_{n-1} \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} + x_{n-2} & \cdots & x_n + x_{n-1} + x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} + x_{n-21} & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} x_m \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} x_3 + x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_1 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = x_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \\ x_2 & x_2 + x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_2 x_1$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} x_3 & x_3 & x_3 \\ x_3 & x_3 + x_2 & x_3 + x_2 \\ x_3 & x_3 + x_2 & x_3 + x_2 + x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_3 x_2 x_1$.

Загальний випадок.

$$*\text{n.}\quad D_n=\begin{vmatrix} x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n \\ x_n & x_n+x_{n-1} & x_n+x_{n-1} & \cdots & x_n+x_{n-1} \\ x_n & x_n+x_{n-1} & x_n+x_{n-1}+x_{n-2} & \cdots & x_n+x_{n-1}+x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n+x_{n-1} & x_n+x_{n-1}+x_{n-21} & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} x_m \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{m=1}^{n} x_m .$$

$$D_n=\prod_{m=1}^{n} x_m .$$

Припустивши, що $\begin{cases} x_n=a_n; \\ x_m=a_m-a_{m+1}; \end{cases}$ $m<n$, після підстановки

дістанемо визначник $D_n=\begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$,

$$D_n=a_n\prod_{m=2}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right).$$

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

3.5.01.

$$a_n = n\ ,\quad x_m = a_m - a_{m+1} = -1,\quad x_n = a_n = n\ .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n & n & \cdots & n \\ n & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (-1)^{n-1} \cdot n$.

3.5.02.

$$a_n = n^2\ ,\quad x_m = a_m - a_{m+1} = -(2m+1),\quad x_n = a_n = n^2\ .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & n^2 & n^2 & \cdots & n^2 \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & (n-2)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot (2n-1)!!$.

3.5.03.

$$a_n = 3n-2\ ,\quad x_m = a_m - a_{m+1} = -3,\quad x_n = a_n = 3n-2\ .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-2 & 3n-2 & \cdots & 3n-2 \\ 3n-2 & 3n-5 & 3n-5 & \cdots & 3n-5 \\ 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 3n-8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 4 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1} \cdot (3n-2)$.

3.5.04.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad x_m = a_m - a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)\cdot m}, \quad x_n = a_n = \frac{1}{n}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \dfrac{1}{(n\,!)^2}$.

3.5.05.

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad x_m = a_m - a_{m+1} = \frac{2n+1}{(m+1)^2\cdot m^2}, \quad x_n = a_n = \frac{1}{n^2}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{(n-1)^2} & \frac{1}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)^2} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{(n-1)^2} & \frac{1}{(n-2)^2} & \cdots & \frac{1}{(n-2)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{(n-1)^2} & \frac{1}{(n-2)^2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \dfrac{(2n-1)\,!!}{(n\,!)^4}$.

3.5.06.

$$a_n=\frac{1}{2n-1}\,,\quad x_m=a_m-a_{m+1}=\frac{2}{(2m+1)\cdot(2m-1)},\quad x_n=a_n=\frac{1}{2n-1}\,.$$

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-3} & \cdots & \frac{1}{2n-3}\\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-5} & \cdots & \frac{1}{2n-5}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-5} & \cdots & 1\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1\end{vmatrix}.$$

\# $D_n=\dfrac{2^{n-1}}{\left[(2n-1)\,!!\right]^2}$.

Приклад 3.6.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix}c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1b^{n-1} & c_1b^{n-2} & c_1b^{n-3} & \cdots & c_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_n & a_{n-1}b & 0 & \cdots & 0\\ c_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & 0\\ c_{n-2} & c_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1\end{vmatrix}$$

Розв'язання

Позначимо $D_n=\begin{vmatrix}c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1b^{n-1} & c_1b^{n-1} & c_1b^{n-1} & \cdots & c_1\end{vmatrix}$.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{c_{n-1}}{c_n}b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}b & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-2} & c_1 b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n & * & * & \cdots & * \\ 0 & c_{n-1} - \dfrac{c_{n-1}}{c_n}a_{n-1}b & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c_{n-2} - \dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}a_{n-2}b & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 - \dfrac{c_1}{c_2}a_1 b \end{vmatrix} = c_1 \prod_{m=2}^{n} \left(c_m - a_{m-1}b\right).$$

$$D_n = c_1 \prod_{m=2}^{n} \left(c_m - a_{m-1}b\right).$$

Аналогічно зробимо з іншим визначником.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & 0 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{c_{n-1}}{c_n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & 0 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
=\begin{vmatrix} c_n & * & * & \cdots & * \\ 0 & c_{n-1}-\dfrac{c_{n-1}}{c_n}a_{n-1}b & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & c_{n-2}-\dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}a_{n-2}b & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1-\dfrac{c_1}{c_2}a_1b \end{vmatrix} = c_1\prod_{m=2}^{n}\left(c_m - a_{m-1}b\right).
$$

$$
\Delta_n = c_1\prod_{m=2}^{n}\left(c_m - a_{m-1}b\right).
$$

Звідки, $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність.

3.6.01.

$$
c_n = a_n ,
$$

$$
\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1}b & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ a_{n-2}b^2 & a_{n-2}b & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b^{n-1} & a_1b^{n-2} & a_1b^{n-3} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} .
$$

$\quad D_n = a_1\prod_{m=2}^{n}\left(a_m - a_{m-1}b\right)$

3.6.02.

$$c_n = 3n-2\,,\quad a_n = n\,,\quad b = 3\,,$$

$$\begin{vmatrix} 3n-2 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\cdot(3n-5) & 3n-5 & n-2 & \cdots & 0 \\ 3^2\cdot(3n-8) & 3\cdot(3n-8) & 3n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3n-2 & 3\cdot(n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 3n-5 & 3n-5 & 3\cdot(n-2) & \cdots & 0 \\ 3n-8 & 3n-8 & 3n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$

3.6.03.

$$c_n = rn-r+1\,,\quad a_n = n\,,\quad b = r \quad / \quad c_n = sn-s+1\,,\quad a_n = n\,,\quad b = s\,,$$

$$\begin{vmatrix} rn-r+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ r\cdot(rn-2r+1) & rn-2r+1 & n-2 & \cdots & 0 \\ r^2\cdot(rn-3r+1) & r\cdot(rn-3r+1) & rn-3r+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} sn-s+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ s\cdot(sn-2s+1) & sn-2s+1 & n-2 & \cdots & 0 \\ s^2\cdot(sn-3s+1) & s\cdot(sn-3s+1) & sn-3s+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-1} & s^{n-2} & s^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$

3.6.04.

$c_n = rn - r + 1$, $a_n = n$, $b = r - 2$ / $c_n = sn - s + 1$, $a_n = n$, $b = s - 2$,

$$\begin{vmatrix} rn-r+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ (r-2)\cdot(rn-2r+1) & rn-2r+1 & n-2 & \cdots & 0 \\ (r-2)^2\cdot(rn-3r+1) & (r-2)\cdot(rn-3r+1) & rn-3r+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (r-2)^{n-1} & (r-2)^{n-2} & (r-2)^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} sn-s+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ (s-2)\cdot(sn-2s+1) & sn-2s+1 & n-2 & \cdots & 0 \\ (s-2)^2\cdot(sn-3s+1) & (s-2)\cdot(sn-3s+1) & sn-3s+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (s-2)^{n-1} & (s-2)^{n-2} & (s-2)^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (2n-1)!!$

3.6.05.

$c_n = rn - r + 1$, $a_n = n$, $b = r - 1$ / $c_n = sn - s + 1$, $a_n = n$, $b = s - 1$,

$$\begin{vmatrix} rn-r+1 & (r-1)\cdot(n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ rn-2r+1 & rn-2r+1 & (r-1)\cdot(n-2) & \cdots & 0 \\ rn-3r+1 & rn-3r+1 & rn-3r+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} sn-s+1 & (s-1)\cdot(n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ sn-2s+1 & sn-2s+1 & (s-1)\cdot(n-2) & \cdots & 0 \\ sn-3s+1 & sn-3s+1 & sn-3s+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = n!$

3.6.06.

$c_n = r\cdot(n-1)^2+1$, $a_n = n^2$, $b=r$ / $c_n = s\cdot(n-1)^2+1$, $a_n = n^2$, $b=s$,

$$\begin{vmatrix} r\cdot(n-1)^2+1 & r\cdot(n-1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ r\cdot(n-2)^2+1 & r\cdot(n-2)^2+1 & r\cdot(n-2)^2 & \cdots & 0 \\ r\cdot(n-3)^2+1 & r\cdot(n-3)^2+1 & r\cdot(n-3)^2+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s\cdot(n-1)^2+1 & s\cdot(n-1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ s\cdot(n-2)^2+1 & s\cdot(n-2)^2+1 & s\cdot(n-2)^2 & \cdots & 0 \\ s\cdot(n-3)^2+1 & s\cdot(n-3)^2+1 & s\cdot(n-3)^2+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 1$

§ 4. Метод рекурентних співвідношень

Для обчислення визначників n-го порядку часто використовують *метод рекурентних співвідношень*. Метод полягає у тому, щоб даний визначник D_n виразити через визначники того ж вигляду, але більш низького порядку $D_{n-1},\cdots,D_{n-k}$. Отримується це співвідношення перетворенням визначника та розкладанням його за елементами рядка (стовпця). При цьому використовують основні властивості визначників. Отримане рекурентне співвідношення k-го порядку, як правило, є лінійним і розв'язаним відносно D_n:

$$D_n = p_1(n)D_{n-1} + \cdots + p_k(n)D_{n-k} + q(n). \qquad (4.1)$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (4.1) називають таку функцію незалежної змінної n

$$D_n = f\left(n\right),$$

яка при підставлянні в (4.1) перетворює співвідношення в тотожність для всіх значень $n \in \mathbb{N}$.

Рівності

$$D_1 = a_1, \cdots, D_k = a_k \qquad (4.2)$$

називаються *початковими умовами*.

Задача визначення розв'язку рекурентного співвідношення (4.1), який задовольняє початковим умовам (4.2), називається *задачею Коші*.

Задача Коші рекурентного співвідношення першого порядку:

$$\begin{cases} D_n = p_n D_{n-1} - q_n, \\ D_1 = a. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Теорема 4.1.

Якщо задача Коші (4.3) має розв'язок, то він єдиний.

Почнемо з прикладів, для розв'язування яких використовують теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

Приклад 4.01.

Довести тотожність:

$$\begin{vmatrix} a_n+b & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & b & a_{n-2}+b & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a_2+b & a_1 \\ b & b & b & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n+b & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_{n-2}+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2+b & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & b & a_{n-2}+b & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a_2+b & a_1 \\ b & b & b & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у ви-} \\ \text{гляді суми визна-} \\ \text{чників} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & b & a_{n-2}+b & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & b & \dots & a_2+b & a_1 \\ 0 & b & b & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b & b & a_{n-2}+b & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a_2+b & a_1 \\ b & b & b & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний} \\ \text{множник } b \text{ з пер-} \\ \text{шого стовпця за} \\ \text{знак визначника} \end{array} \right| =$$

$$= a_n \cdot D_{n-1} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 1 & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 1 & b & a_{n-2}+b & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & b & \dots & a_2+b & a_1 \\ 1 & b & b & \dots & b & a_1+b \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетво-} \\ \text{рення зі стовпцями} \\ \\ II - a_{n-1} \cdot I \to II \\ III - a_{n-2} \cdot II \to III \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N - a_1 \cdot I \to N \end{array} \right| =$$

$$= a_n \cdot D_{n-1} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & b & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b-a_{n-1} & b-a_{n-2} & \dots & b & 0 \\ 1 & b-a_{n-1} & b-a_{n-2} & \dots & b-a_2 & b \end{vmatrix} = a_n \cdot D_{n-1} + b^n .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші $\begin{cases} D_n = a_n \cdot D_{n-1} + b^n, \\ D_1 = a_1 + b. \end{cases}$.

Далі

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n + b & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + b & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a_1 + b \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{запишемо даний ви-} \\ \text{значник у вигляді} \\ \text{суми визначників} \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} + b & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + b & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a_1 + b \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + b & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a_1 + b \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{проведемо серію послі-} \\ \text{довних елементарних} \\ \text{перетворень} \\ II - I \to II \\ III - II \to III \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \langle N \rangle - \langle N - I \rangle \to \langle N \rangle \end{matrix} \right| = a_n \cdot \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} b & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$= a_n \cdot \Delta_{n-1} + b^n .$$

Варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші $\begin{cases} \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} + b^n, \\ \Delta_1 = a_1 + b. \end{cases}$.

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

4.1.01.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ 0 & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

4.1.02.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 3 & 3 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & 3^{n-2} \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

4.1.03.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

4.1.04.

$$a_n = n, \quad b = 1,$$

$$\begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & n & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & n-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

4.1.05.

$$a_n = 3n-2, \quad b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 3n-1 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 1 & 3n-4 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3n-1 & 3n-5 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3n-4 & 3n-8 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

4.1.06.

$$a_n = 2n-1, \quad b=-1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-2 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ -1 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2n-6 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-2 & 2n-3 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2n-6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4.02.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nx & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми визначників} \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} z_n-a_nx & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_nx & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(z_n-a_nx\right)\cdot D_{n-1}+x\cdot\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} II-y\cdot I\to II \\ III-y\cdot I\to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N-y\cdot I\to N \end{vmatrix}=$$

$$=\left(z_n-a_nx\right)\cdot D_{n-1}+x\cdot\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & z_{n-1}-a_{n-1}y & a_{n-2}\left(x-y\right) & \cdots & a_1\left(x-y\right) \\ 0 & 0 & z_{n-2}-a_{n-2}y & \cdots & a_1\left(x-y\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1-a_1y \end{vmatrix}=$$

$$=\left(z_n-a_nx\right)\cdot D_{n-1}+a_nx\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(z_m-a_mx\right).$$

Таким чином, варіанта D_n є розв’язком задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n=\left(z_n-a_nx\right)\cdot D_{n-1}+a_nx\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(z_m-a_mx\right); \\ D_1=z_1. \end{cases}.$$

З іншого боку

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nx & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми визначників}\end{matrix}\right|=$$

$$
=\begin{vmatrix} z_n-a_nx & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ 0 & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ 0 & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_nx & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nx & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
=(z_n-a_nx)\cdot\Delta_{n-1}+a_nx\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ 1 & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ 1 & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
=\left|\begin{array}{l} \text{елементарні перетво-} \\ \text{рення зі стовпцями} \\ II-a_{n-1}y\cdot I\to II \\ III-a_{n-2}y\cdot I\to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N-a_1y\cdot I\to N \end{array}\right| =
$$

$$
=(z_n-a_nx)\cdot\Delta_{n-1}+a_nx\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_{n-1}-a_{n-1}y & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1}(x-y) & z_{n-2}-a_{n-2}y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1}(x-y) & a_{n-2}(x-y) & \cdots & z_1-a_1y \end{vmatrix} =
$$

$$
=(z_n-a_nx)\cdot D_{n-1}+a_nx\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m-a_mx).
$$

Варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші

$$
\begin{cases} \Delta_n=(z_n-a_nx)\cdot D_{n-1}+a_nx\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}(z_m-a_mx); \\ \Delta_1=z_1. \end{cases}
$$

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n=\Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

4.02.01.

$$z_n = 2n-1, \quad a_n = n+1, \quad x = 1, \quad y = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ -(n+1) & 2n-3 & n-1 & \cdots & 2 \\ -(n+1) & -n & 2n-5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n+1) & -n & -(n-1) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & -n & -(n-1) & \cdots & -2 \\ n+1 & 2n-3 & -(n-1) & \cdots & -2 \\ n+1 & n & 2n-5 & \cdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (n-2) \cdot D_{n-1} + (n+1) \cdot 3^{n-1} \cdot (n-1)!$. $D_1 = 1$.

4. 02.02.

$$z_n = n-1, \quad a_n = n, \quad x = 1, \quad y = 2,$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n & n-2 & n-1 & \cdots & 1 \\ 2n & 2n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = -D_{n-1} + n \cdot (-1)^{n-1} \cdot n!$. $D_1 = 0$.

4. 02.03.

$$z_n = 2^n + 1, \quad a_n = 2^n, \quad x = 1, \quad y = 1/2,$$

$$\begin{vmatrix} 2^n+1 & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 2 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1}+1 & 2^{n-2} & \cdots & 2 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-2}+1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^n+1 & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1}+1 & 2^{n-3} & \cdots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & 2^{n-2}+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^n & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + 2^n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (2^{m-1} + 1)$. $D_1 = 3$.

4.02.04.

$$z_n = a^n + 1, \quad a_n = a^n, \quad x = 1, \quad y = {}^1\!/_a,$$

$$\begin{vmatrix} a^n+1 & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a \\ a^{n-1} & a^{n-1}+1 & a^{n-2} & \cdots & a \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-2}+1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^n+1 & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \\ a^n & a^{n-1}+1 & a^{n-3} & \cdots & 1 \\ a^n & a^{n-1} & a^{n-2}+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a+1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + a^n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left((a-1) \cdot a^{m-1} + 1 \right).$ $D_1 = 4$.

4.02.05.

$$z_n = 3^{2n-1} + 1, \quad a_n = 3^{2n-1}, \quad x = 1, \quad y = {}^1\!/_3,$$

$$\begin{vmatrix} 3^{2n-1}+1 & 3^{2n-3} & 3^{2n-5} & \cdots & 3 \\ 3^{2n-2} & 3^{2n-3}+1 & 3^{2n-5} & \cdots & 3 \\ 3^{2n-2} & 3^{2n-4} & 3^{2n-5}+1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2n-2} & 3^{2n-4} & 3^{2n-6} & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^{2n-1}+1 & 3^{2n-4} & 3^{2n-6} & \cdots & 1 \\ 3^{2n-1} & 3^{2n-3}+1 & 3^{2n-6} & \cdots & 1 \\ 3^{2n-1} & 3^{2n-3} & 3^{2n-5}+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2n-1} & 3^{2n-3} & 3^{2n-5} & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + 3^{2n-1} \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(2 \cdot 3^{2m-2} + 1 \right).$ $D_1 = 4$.

4.02.06.

$$z_n = a^{3n-2} + 1, \quad a_n = a^{3n-2}, \quad x = 1, \quad y = {}^1\!/_a,$$

$$\begin{vmatrix} & a^{3n-2}+1 & a^{3n-5} & a^{3n-8} & \cdots & a \\ & a^{3n-3} & a^{3n-5}+1 & a^{3n-8} & \cdots & a \\ a & a^{3n-3} & a^{3n-6} & a^{3n-8}+1 & \cdots & a \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a^{3n-3} & a^{3n-6} & a^{3n-9} & \cdots & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{3n-2}+1 & a^{3n-6} & a^{3n-9} & \cdots & 1 \\ a^{3n-2} & a^{3n-5}+1 & a^{3n-9} & \cdots & 1 \\ a^{3n-2} & a^{3n-5} & a^{3n-8}+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{3n-2} & a^{3n-5} & a^{3n-8} & \cdots & a+1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + a^{3n-2} \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left((a-1) \cdot a^{3m-3} + 1 \right).$ $D_1 = a + 1$.

4.02.07.

$$z_n = n!+1, \quad a_n = n!, \quad x = 1, \quad y = a\ ,$$

$$\begin{vmatrix} n!+1 & (n-1)! & (n-2)! & \cdots & 1 \\ a\cdot n! & (n-1)!+1 & (n-2)! & \cdots & 1 \\ a\cdot n! & a\cdot(n-1)! & (n-2)!+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a\cdot n! & a\cdot(n-1)! & a\cdot(n-2)! & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n!+1 & a\cdot(n-1)! & a\cdot(n-2)! & \cdots & a \\ n! & (n-1)!+1 & a\cdot(n-2)! & \cdots & a \\ n! & (n-1)! & (n-2)!+1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n! & (n-1)! & (n-2)! & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + (n!)\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left((1-a)\cdot m!+1\right). \quad D_1 = a+1\,.$

Приклад 4.03.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & \frac{a_n}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_n}{a_1}x \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_1}x \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}y & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_1}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1}{a_n}y & \frac{a_1}{a_{n-1}}y & \frac{a_1}{a_{n-2}}y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на число відмінне від нуля, а всі елементи деякого стовпця поділити на те саме число, то значення визначника не зміниться. Крім того, не зміниться і елемент визначника, який міститься на перетині вказаних рядка та стовпця. Скористаємося цією властивістю для перетворення визначників.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & \frac{a_n}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_n}{a_1}x \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_1}x \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}y & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_1}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1}{a_n}y & \frac{a_1}{a_{n-1}}y & \frac{a_1}{a_{n-2}}y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{з рядками:} & \text{зі стовпцями:} \\ \frac{1}{a_n}\cdot I \to I & a_? \cdot I \to I \\ \frac{1}{a_{n-1}}\cdot II \to II & a_{?-1}\cdot II \to II \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{a_1}\cdot N \to N & a_1 \cdot N \to N \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{з рядками:} & \text{зі стовпцями:} \\ \frac{1}{a_n}\cdot I \to I & a_? \cdot I \to I \\ \frac{1}{a_{n-1}}\cdot II \to II & a_{?-1}\cdot II \to II \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{a_1}\cdot N \to N & a_1 \cdot N \to N \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

Отже, для розв’язування даної задачі необхідно довести тотожність:

$$\begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \text{запишемо даний визначник у вигляді суми визначників} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+y & x & \cdots & x \\ 0 & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot D_{n-1} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x+y & x & \cdots & x \\ 1 & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення зі стовпцями} \\ K - x \cdot I \to K \\ K = \overline{2,\, n} \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot D_{n-1} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y-x & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y-x & y-x & \cdots & y \end{vmatrix} = x \cdot D_{n-1} + y^n \cdot$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = x\cdot D_{n-1} + y^n; \\ D_1 = x + y. \end{cases}$$

Далі,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми визначників} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot\Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{проведемо серію послі-} \\ \text{довних елементарних} \\ \text{перетворень} \\ II - I \to II \\ III - II \to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ <N> - <N-I> \to <N> \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix} = x\cdot\Delta_{n-1} + y^n.$$

Варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші $\begin{cases} \Delta_n = x\cdot\Delta_{n-1} + y^n; \\ \Delta_1 = x + y. \end{cases}$

Задачі Коші для варіантів D_n та Δ_n співпадають, отже $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

4.03.01.

$$x=1, \quad y=1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_n}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_n}{a_1} \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} & 2 & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_1} \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} & 2 & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_1}{a_{n-1}} & \frac{a_1}{a_{n-2}} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} & 2 & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + 1$.

4. 03.02.

$$a_n = 3^n \ , \ x=1, \quad y=3,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ 1 & 4 & 3 & \cdots & 3^{n02} \\ 3^{-1} & 1 & 4 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2-n} & 3^{3-n} & 3^{4-n} & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 3 \cdot D_{n-1} + 1$, $D_n = D_{n-1} + 3^n$.

4. 03.03.

$$a_n = 1 \ , \ x=2, \quad y=1 \ ,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 2 \cdot D_{n-1} + 1$, $D_n = D_{n-1} + 2^n$.

4. 03.04.

$$a_n = 1\,,\ x = 3, \quad y = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = D_{n-1} + 3^n$, $D_n = 3 \cdot D_{n-1} + 1$.

4. 03.05.

$$a_n = 1,\ x = 2, \quad y = 5\,,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 7 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 5 & 7 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 5 & 7 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 5 \cdot D_{n-1} + 2^n$, $D_n = 2 \cdot D_{n-1} + 5^n$.

4. 03.06.

$$a_n = 1\,,\ x \Leftrightarrow x + a, \quad y \Leftrightarrow y - a\,,$$

$$\begin{vmatrix} x+y & x+a & x+a & \cdots & x+a \\ y-a & x+y & x+a & \cdots & x+a \\ y-a & y-a & x+y & \cdots & x+a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y-a & y-a & y-a & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & x+a & 0 & \cdots & 0 \\ y-a & x+y & x+a & \cdots & 0 \\ 0 & y-a & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (x+a) \cdot D_{n-1} + (y-a)^n$, $D_n = (y-a) \cdot D_{n-1} + (x+a)^n$.

4. 03.07.

$$a_n = 1\,,\ x \Leftrightarrow 2xy, \quad y \Leftrightarrow (y-x)^2,$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2xy & 2xy & \cdots & 2xy \\ (y-x)^2 & x^2+y^2 & 2xy & \cdots & 2xy \\ (y-x)^2 & (y-x)^2 & x^2+y^2 & \cdots & 2xy \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (y-x)^2 & (y-x)^2 & (y-x)^2 & \cdots & x^2+y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2xy & 0 & \cdots & 0 \\ (y-x)^2 & x^2+y^2 & 2xy & \cdots & 0 \\ 0 & (y-x)^2 & x^2+y^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^2+y^2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 2xy \cdot D_{n-1} + (y-x)^{2n}$, $D_n = (y-x)^2 \cdot D_{n-1} + (2xy)^n$.

4. 03.08.

$$a_n = 1\,,\; x = 8 = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}, \quad y = 2 = \left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^2,$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 8 & 8 & \cdots & 8 \\ 2 & 10 & 8 & \cdots & 8 \\ 2 & 2 & 10 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 10 & 8 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 10 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 10 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = 8\cdot D_{n-1} + 2^n$, $D_n = 2\cdot D_{n-1} + 8^n$.

Приклад 4.04.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} x_n + y_n & \frac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{a_n x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_n x_1}{a_1} \\ \frac{a_{n-1} y_n}{a_n} & x_{n-1} + y_{n-1} & \frac{a_{n-1} x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-1} x_1}{a_1} \\ \frac{a_{n-2} y_n}{a_n} & \frac{a_{n-2} y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & \frac{a_{n-2} x_1}{a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1 y_n}{a_n} & \frac{a_1 y_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{a_1 y_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_n + y_n & \frac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{n-1} y_n}{a_n} & x_{n-1} + y_{n-1} & \frac{a_{n-1} x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{n-2} y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n + y_n & \dfrac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_n x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \dfrac{a_n x_1}{a_1} \\ \dfrac{a_{n-1} y_n}{a_n} & x_{n-1} + y_{n-1} & \dfrac{a_{n-1} x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \dfrac{a_{n-1} x_1}{a_1} \\ \dfrac{a_{n-2} y_n}{a_n} & \dfrac{a_{n-2} y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & \dfrac{a_{n-2} x_1}{a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_1 y_n}{a_n} & \dfrac{a_1 y_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_1 y_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{з рядками: зі стовпцями:} \\ \dfrac{1}{a_n} \cdot I \to I \qquad a_{?} \cdot I \to I \\ \dfrac{1}{a_{n-1}} \cdot II \to II \qquad a_{?-1} \cdot II \to II \\ \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{1}{a_1} \cdot N \to N \qquad a_1 \cdot N \to N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n + y_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_n + y_n & \dfrac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_{n-1} y_n}{a_n} & x_{n-1} + y_{n-1} & \dfrac{a_{n-1} x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{n-2} y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\left|\begin{array}{cc}
\text{з рядками:} & \text{зі стовпцями:} \\
\frac{1}{a_n}\cdot I \to I & a_? \cdot I \to I \\
\frac{1}{a_{n-1}}\cdot II \to II & a_{?-1} \cdot II \to II \\
\cdots & \cdots \\
\frac{1}{a_1}\cdot N \to N & a_1 \cdot N \to N
\end{array}\right|=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
x_n + y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
y_n & x_{n-1}+y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\
0 & y_{n-1} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x_1+y_1
\end{vmatrix}.
$$

Отже, для розв'язування даної задачі необхідно довести тотожність:

$$
\begin{vmatrix}
x_n + y_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\
y_n & x_{n-1}+y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\
y_n & y_{n-1} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & x_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1+y_1
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
x_n + y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
y_n & x_{n-1}+y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\
0 & y_{n-1} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x_1+y_1
\end{vmatrix}.
$$

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n + y_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми визначників} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 0 & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_n \cdot D_{n-1} + y_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 1 & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 1 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні} \\ \text{перетворення зі} \\ \text{стовпцями} \\ \text{7VAB>2?FO<8:} \\ II - x_{n-1} \cdot I \to II \\ III - x_{n-2} \cdot I \to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N - x_1 \cdot I \to N \end{array} \right| = x_n \cdot D_{n-1} + y_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y_{n-1} - x_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y_{n-1} - x_{n-1} & y_{n-2} - x_{n-2} & \cdots & y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_n \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} y_m \; .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = x_n \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} y_m; \\ D_1 = x_1 + y_1. \end{cases}$$

Далі,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_n + y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми визначників} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_n \cdot \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_n & x_{n-1} + y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} + y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 + y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{проведемо серію послі-} \\ \text{довних елементарних} \\ \text{перетворень} \\ II - I \to II \\ III - II \to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ < N > - < N - I > \to < N > \end{array} \right| =$$

$$
= x_n \cdot \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} y_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_1 \end{vmatrix} = x_n \cdot \Delta_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} y_m .
$$

Варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші $\begin{cases} \Delta_n = x_n \cdot \Delta_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} y_m ; \\ \Delta_1 = x_1 + y_1 . \end{cases}$

Задачі Коші для варіантів D_n та Δ_n співпадають, отже $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

4.04.01.

$$
x_n = a_n , \quad y_n = a_n ,
$$

$$
\begin{vmatrix} 2a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & 2a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_1 \end{vmatrix} .
$$

\# $D_n = a_n \cdot D_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} a_m$.

4. 04.02.

$$
a_n = 3^n , \; x_n = 1, \quad y_n = 3^n ,
$$

$$
\begin{vmatrix} 3^n + 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} + 1 & 3 & \cdots & 3^{n02} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} + 1 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^n + 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} + 1 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 3^{n-2} & 3^{n-2} + 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix} .
$$

\# $D_n = D_{n-1} + 3^{\frac{n \cdot \cdot (n+1)}{2}}$.

4. 04.03.

$$a_n = const\,,\ x_n = n,\quad y_n = n+1\,,$$

$$\begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = n\cdot D_{n-1} + (n+1)!\,.$

4. 04.04.

$$a_n = const\,,\ x_n = 2n-1,\quad y_n = n^2+1,$$

$$\begin{vmatrix} n^2+2n & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n^2+1 & n^2-1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n^2+1 & n^2-2n+2 & n^2-2n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2+1 & n^2-2n+2 & n^2-4n+5 & \cdots & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n^2+2n & 2n-3 & 0 & \cdots & 0 \\ n^2+1 & n^2-1 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & n^2-2n+2 & n^2-2n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n}\left(m^2+1\right).$

4. 04.05.

$$a_n = const\,,\ x_n \Leftrightarrow x_n + a_n,\quad y_n \Leftrightarrow y_n - a_n\,,$$

$$\begin{vmatrix} x_n+y_n & x_{n-1}+a_{n-1} & x_{n-2}+a_{n-2} & \cdots & x_1+a_1 \\ y_n-a_n & x_{n-1}+y_{n-1} & x_{n-2}+a_{n-2} & \cdots & x_1+a_1 \\ y_n-a_n & y_{n-1}-a_{n-1} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & x_1+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n-a_n & y_{n-1}-a_{n-1} & y_{n-2}-a_{n-2} & \cdots & x_1+y_1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
x_n+y_n & x_{n-1}+a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
y_n-a_n & x_{n-1}+y_{n-1} & x_{n-2}+a_{n-2} & \cdots & 0 \\
0 & y_{n-1}-a_{n-1} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x_1+y_1
\end{vmatrix}.
$$

$D_n=\left(x_n+a_n\right)\cdot D_{n-1}+\prod_{m=1}^{n}\left(y_m-a_m\right)$,

4. 04.06.

$$a_n=const\ ,\ y_n=z_n-x_n\ ,$$

$$
\begin{vmatrix}
z_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\
z_n-x_n & z_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\
z_n-x_n & z_{n-1}-x_{n-1} & z_{n-2} & \cdots & x_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
z_n-x_n & z_{n-1}-x_{n-1} & z_{n-2}-x_{n-2} & \cdots & z_1
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
z_n & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
z_n-x_n & z_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & 0 \\
0 & z_{n-1}-x_{n-1} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & z_1
\end{vmatrix}.
$$

$D_n=x_n\cdot D_{n-1}+\prod_{m=1}^{n}\left(z_m-x_m\right)$.

Приклад 4.05.

Довести тотожність.

$$
\begin{vmatrix}
1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\
b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\
c & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c & c & c & \cdots & 1
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\
a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\
c & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c & c & c & \cdots & 1
\end{vmatrix}.
$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ c & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \, I - a \cdot II \to I \, \right| = \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ c & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-ab) \cdot D_{n-1} .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = (1-ab) \cdot D_{n-1}; \\ D_1 = 1. \end{cases}$$

Далі,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ c & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \, I - b \cdot II \to I \, \right| = \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ c & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-ab) \cdot \Delta_{n-1} .$$

Варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші $\begin{cases} \Delta_n = (1-ab) \cdot \Delta_{n-1}; \\ \Delta_1 = 1. \end{cases}$

Задачі Коші для варіант D_n та Δ_n співпадають, отже $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

4.05.01.

$$a = 1, \quad b = 2 ,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ c & 1 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_n = -D_{n-1}$.

4. 05.02.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ a & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (1-ab)D_{n-1}$.

4. 05.03.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ c & 3 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 6 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & 6 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (1-6)D_{n-1}$.

4. 05.04.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1}b & a_{n-2}b^2 & \cdots & a_1b^{n-1} \\ c & a_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & a_1b^{n-2} \\ x & c & a_{n-2} & \cdots & a_1b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1}c & a_{n-2}c^2 & \cdots & a_1c^{n-1} \\ b & a_{n-1} & a_{n-2}c & \cdots & a_1c^{n-2} \\ x & b & a_{n-2} & \cdots & a_1c^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (a_n - bc)\cdot D_{n-1}$.

4. 05.05.

$$\begin{vmatrix} a^n & a^{n-1}b & a^{n-2}b^2 & \cdots & a\cdot b^{n-1} \\ c & a^{n-1} & a^{n-2}b & \cdots & a\cdot b^{n-2} \\ x & c & a^{n-2} & \cdots & a\cdot b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^n & a^{n-1}c & a^{n-2}c^2 & \cdots & a\cdot c^{n-1} \\ b & a^{n-1} & a^{n-2}c & \cdots & a\cdot c^{n-2} \\ x & b & a^{n-2} & \cdots & a\cdot c^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (a^n - bc)\cdot D_{n-1}$.

4. 05.06.

$$\begin{vmatrix} n & (n-1)\cdot b & (n-2)\cdot b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ c & (n-1) & (n-2)\cdot b & \cdots & b^{n-2} \\ x & c & (n-2) & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & (n-1)\cdot c & (n-2)\cdot c^2 & \cdots & c^{n-1} \\ b & (n-1) & (n-2)\cdot c & \cdots & c^{n-2} \\ x & b & (n-2) & \cdots & c^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (n - bc)\cdot D_{n-1}$.

§ 5. Однорідні рекурентні співвідношення першого порядку

Розглянемо визначники, для яких можна скласти рекурентне співвідношення вигляду $D_n = p(n)\cdot D_{n-1}$. Припустивши, що $D_1 = c$, і застосувавши метод математичної індукції, отримаємо

$$D_1 = c,$$
$$D_2 = p(2)\cdot D_1 = p(2)\cdot c,$$
$$D_3 = p(3)\cdot D_2 = p(3)\cdot p(2)\cdot c,$$
$$\ldots$$
$$D_{n-1} = c\cdot\prod_{m=2}^{n-1} p(m),$$
$$D_n = p(n)\cdot\left(c\cdot\prod_{m=2}^{n-1} p(m)\right) = c\cdot\prod_{m=2}^{n} p(m).$$

Наприклад, $D_n = 2\cos\left(2^{n-1}x\right)\cdot D_{n-1}$. Застосувавши рекурентну формулу, дістанемо послідовність:

$$D_1 = \sin(2x),$$
$$D_2 = 2\cos(2x)\cdot D_1 =, 2\cos(2x)\cdot\sin(2x) = \sin\left(2^2 x\right),$$
$$D_3 = 2\cos(4x)\cdot D_2 = 2\cos(4x)\cdot\sin(4x) = \sin(8x) = \sin\left(2^3 x\right),$$
$$\ldots$$
$$D_{n-1} = \sin\left(2^{n-1}x\right),$$
$$D_n = 2\cos\left(2^{n-1}x\right)\cdot D_{n-1} = 2\cos\left(2^{n-1}x\right)\cdot\sin\left(2^{n-1}x\right) = \sin\left(2^n x\right).$$

Окремі випадки.

1. $D_n = 2\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = 2^{n-1}$.
2. $D_n = -2\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = (-1)^{n-1}\,2^{n-1}$.
3. $D_n = n\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = (2n-1)!!$.
4. $D_n = \dfrac{n}{n-1}\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = n$.
5. $D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = n!$.
6. $D_n = 2^n\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 2$. # $D_n = 2^{n+(n-1)+\ldots+1} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
7. $D_n = \dfrac{D_{n-1}}{n+1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = \dfrac{2}{(n+1)!}$.
8. $D_n = \dfrac{D_{n-1}}{2n-1}$, $D_1 = 1$. # $D_n = \dfrac{1}{(2n-1)!!}$.

Приклад 5.01.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \left| \, I - II \to I \, \right| = \begin{vmatrix} a_n - a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_n - a_{n-1}) D_{n-1} .$$

$$\begin{cases} D_1 = a_1; \\ D_n = \left(a_n - a_{n-1}\right) D_{n-1}. \end{cases}$$

Використовуючи припущення індукції, остаточно виводимо

$$D_2 = \left(a_2 - a_1\right) D_1 = a_1 \left(a_2 - a_1\right);$$

$$D_3 = \left(a_3 - a_2\right) D_2 = a_1 \left(a_2 - a_1\right)\left(a_3 - a_2\right);$$

....

$$D_n = a_1 \prod_{m=2}^{n} \left(a_m - a_{m-1}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.01.01. $$D_n=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=D_{n-1}$, $D_n=1$.
5.01.02. $$D_n=\begin{vmatrix} n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ (n-1)^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ (n-2)^2 & (n-2)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=(2n-1)D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=(2n-1)!!$.
5.01.03. $$D_n=\begin{vmatrix} n & n & n & \cdots & n \\ n & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=-\dfrac{n}{n-1}D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=(-1)^{n-1}n$.

5.01.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n-1} & \sqrt{n-2} & \cdots & 1 \\ \sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} & \sqrt{n-2} & \cdots & 1 \\ \sqrt{n-2} & \sqrt{n-2} & \sqrt{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) D_{n-1}$,

$$D_n = \prod_{m=1}^{n} \left(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}\right).$$

5.01.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = \dfrac{D_{n-1}}{n(n-1)}$, $D_1 = 1$,

$$D_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{(n!)^2}.$$

5.01.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -\dfrac{2(2n-1)}{2n-3} D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-2)^{n-1}(2n-1)$.

5.01.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^{1-n} & 2^{2-n} & 2^{3-n} & \cdots & 1 \\ 2^{2-n} & 2^{2-n} & 2^{3-n} & \cdots & 1 \\ 2^{3-n} & 2^{3-n} & 2^{3-n} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -2^{1-n} D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1} 2^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Приклад 5.02.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n + z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} + z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix},$$

де $z_0 = 0$; $D_3 = \begin{vmatrix} z_3 + z_2 & z_2 & 0 \\ z_2 & z_2 + z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} z_2 + z_1 & z_1 \\ z_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 & 0 \\ z_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_1 & z_1 \end{vmatrix} = z_1 z_2 + 0 = z_1 z_2$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} z_3 + z_2 & z_2 & 0 \\ z_2 & z_2 + z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_3 & 0 & 0 \\ z_2 & z_2 + z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_2 & 0 \\ z_2 & z_2 + z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix} =$

$$= z_3 \cdot D_2 + \begin{vmatrix} z_2 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix} = z_3 \cdot D_2 + 0 = z_3 z_2 z_1 . \qquad D_3 = z_3 z_2 z_1 .$$

*n. Визначник можна подати у вигляді суми двох визначників

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n + z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} + z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} + z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} + z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$=z_n\cdot D_{n-1}+\begin{vmatrix} z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1}+z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2}+z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{проведемо послідовно серію}\\ \text{елементарних перетворень}\\ II-I\to II\\ III-II\to III\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ <N>-<N-I>\to<N>\end{array}\right|=$$

$$=z_n\cdot D_{n-1}+\begin{vmatrix} z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=z_n\cdot D_{n-1}+0=z_n\cdot D_{n-1}.$$

Отже, $D_n=z_n\cdot D_{n-1}$. Взявши до уваги початкову умову $D_1=z_1$, остаточно маємо $D_n=\prod_{m=1}^{n}z_m$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.02.01.

$$z_n=n+1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=6$, $D_3=24$, $D_n=(n+1)\cdot D_{n-1}$,

$D_n=(n+1)!$.

5.02.02.

$$z_n = 2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-1 & 4n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-3 & 4n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 15$, $D_3 = 105$, $D_n = (2n+1)\cdot D_{n-1}$,

$D_n = (2n+1)!!$.

5.02.03.

$$z_n = (n+1)n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n^2 & n(n-1) & \cdots & 0 \\ n(n-1) & 2\cdot(n-1)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 12$, $D_3 = 144$, $D_n = n(n+1)\cdot D_{n-1}$,

$D_n = n!\cdot(n+1)!$.

5.02.04.

$$z_n = n+2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+3 & n+1 & \cdots & 0 \\ n+1 & 2n+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 12$, $D_3 = 60$, $D_n = (n+2)\cdot D_{n-1}$,

$D_n = \dfrac{(n+2)!}{2}$.

5.02.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3\cdot 2^{n-1}-2 & 2^{n-1}-1 & \cdots & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 3\cdot 2^{n-2}-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 21$, $D_n = \left(2^n - 1\right)\cdot D_{n-1}$,

$D_n = \prod_{m=1}^{n}\left(2^n - 1\right)$.

5.02.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n^2+4n-2 & n^2+n-2 & \cdots & 0 \\ n^2+n-2 & 2n^2-4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 28 & 10 & 0 \\ 10 & 14 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 40$, $D_3 = 720$, $D_n = n\left(n+3\right)\cdot D_{n-1}$,

$D_n = n\,!\cdot\dfrac{\left(n+3\right)!}{6}$.

5.02.07.

$$z_n = \left(-1\right)^{n+1} n\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \left(-1\right)^{n+1} & \left(-1\right)^n\left(n-1\right) & \cdots & 0 \\ \left(-1\right)^n\left(n-1\right) & \left(-1\right)^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -2$, $D_3 = -6$, $D_n = \left(-1\right)^{n+1} n\cdot D_{n-1}$,

$D_n = \left(-1\right)^{\frac{(n+3)n}{2}} n\,!$.

Приклад 5.03.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b & 1 & a \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}, \ (ab \neq 1).$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \ I - a \cdot II \to I \ \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1-ab)D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_1 = 1; \\ D_n = (1-ab)D_{n-1}. \end{cases}$$

Використовуючи припущення індукції, остаточно виводимо

$$D_2 = (1-ab)D_1 = (1-ab)\cdot 1;$$

$$D_3 = (1-ab)D_2 = (1-ab)^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n = (1-ab)^{n-1}.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.03.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 3^2 & 3 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -5D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-5)^{n-1}$.
5.03.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ b & a & 1 & \cdots & x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (1-ax)D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (1-ax)^{n-1}$.
5.03.03. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} & \cdots & e^{(n-1)x} \\ e^x & 1 & e^x & \cdots & e^{(n-2)x} \\ 0 & e^x & 1 & \cdots & e^{(n-3)x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ e^x & 1 & e^x \\ 0 & e^x & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (1-e^{2x})D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = \left(1-e^{2x}\right)^{n-1}$.

5.03.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ a & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ a & a & 1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (1+a)D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (1+a)^{n-1}$.

5.03.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (1-a_1)D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (1-a_1)^{n-1}$.

5.03.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -2D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}$.

5.03.07.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b_{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ c & b_{n-2} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b_2 & 1 & a \\ c & b_1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=(1-ab_{n-1})D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=\prod_{m=1}^{n-1}(1-ab_m)$.

Приклад 5.04.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & z_{n-1}\cdot a & z_{n-2}\cdot a^2 & \cdots & z_1\cdot a^{n-1} \\ b_{n-1} & z_{n-1} & z_{n-2}\cdot a & \cdots & z_1\cdot a^{n-2} \\ c & b_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & z_1\cdot a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & z_1 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} z_3 & z_2\cdot a & z_1\cdot a^2 \\ b_2 & z_2 & z_1\cdot a \\ c & b_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1=z_1$.

*2. $D_2=\begin{vmatrix} z_2 & z_1\cdot a \\ b_1 & z_1 \end{vmatrix}=\left| I-a\cdot II\to I \right|=\begin{vmatrix} z_2-ab_1 & 0 \\ b_1 & z_1 \end{vmatrix}$.

$D_2=(z_2-ab_1)\cdot D_1=(z_2-ab_1)\cdot z_1$.

*3. $D_3=\begin{vmatrix} z_3 & z_2\cdot a & z_1\cdot a^2 \\ b_2 & z_2 & z_1\cdot a \\ c & b_1 & z_1 \end{vmatrix}=\left| I-a\cdot II\to I \right|=\begin{vmatrix} (z_3-ab_2) & 0 & 0 \\ b_2 & z_2 & z_1\cdot a \\ c & b_1 & z_1 \end{vmatrix}$.

$D_3=(1-ab)\cdot D_2$. $D_3=(z_3-ab_2)\cdot D_2=(z_3-ab_2)\cdot(z_2-ab_1)\cdot z_1$.

Загальний випадок.

$$*\text{n.}\quad D_n = \begin{vmatrix} z_n & z_{n-1}\cdot a & z_{n-2}\cdot a^2 & \cdots & z_1\cdot a^{n-1} \\ b_{n-1} & z_{n-1} & z_{n-2}\cdot a & \cdots & z_1\cdot a^{n-2} \\ c & b_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & z_1\cdot a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - a\cdot II \to I \; \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} (z_n - ab_{n-1}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & z_{n-1} & z_{n-2}\cdot a & \cdots & z_1\cdot a^{n-2} \\ c & b_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & z_1\cdot a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = (z_n - ab_{n-1})\cdot D_{n-1}.$$

$$D_n = (z_n - ab_{n-1})\cdot D_{n-1}.$$

Використовуючи припущення індукції, остаточно виводимо

$$D_n = z_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} (z_m - ab_{m-1}).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.04.01.

$$z_n = n, \quad a = 1, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ c & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{matrix}, \; D_n = D_{n-1}, \; D_n = 1.$$

5.04.02.

$$z_n = 2n-1\,,\quad a=1\,,\quad b_n = 2n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-3 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ c & 2n-5 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 4. \end{matrix}$, $D_n = 2\cdot D_{n-1}$, $D_n = 2^{n-1}$.

5.04.03.

$$z_n = 3n-2\,,\quad a=1\,,\quad b_n = 2n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 2n-3 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ c & 2n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 3, \\ D_3 = 12. \end{matrix}$, $D_n = (n+1)\cdot D_{n-1}$, $D_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$.

5.04.04.

$$z_n = n\,,\quad a=2\,,\quad b_n = n\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2n-2 & 4n-8 & \cdots & 2^{n-1} \\ n-1 & n-1 & 4n-8 & \cdots & 2^{n-2} \\ c & n-2 & n-2 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 0. \end{matrix}$, $D_n = (2-n)\cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = 0$.

5.04.05. $$z_n = 2n+1\,,\quad a=2\,,\quad b_n = n+1\,,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 4n-2 & 8n-12 & \cdots & 3\cdot 2^{n-1} \\ n & 2n-1 & 8n-12 & \cdots & 3\cdot 2^{n-2} \\ c & n-1 & 2n-3 & \cdots & 3\cdot 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 6 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 3, \\ D_3 = 3. \end{matrix}$, $D_n = D_{n-1}$, $D_n = 3$.
5.04.06. $$z_n = 3n-1\,,\quad a=2\,,\quad b_n = n+1\,,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & 6n-8 & 12n-28 & \cdots & 2^{n} \\ n & 3n-4 & 12n-28 & \cdots & 2^{n-1} \\ c & n-1 & 3n-7 & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ c & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 4. \end{matrix}$, $D_n = (n-1)\cdot D_{n-1}$, $D_n = 2\cdot(n-1)\,!$.

Приклад 5.05.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & a & a & \cdots & a \\ 1 & n-1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & a & a \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} n & a & a & \cdots & a \\ 1 & n-1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \; I - a \cdot N \to I \; \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} n-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n-1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (n-a) \cdot D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_1 = 1; \\ D_n = (n-a) \cdot D_{n-1}. \end{cases}$$

$$D_2 = (2-a) D_1 = (2-a);$$

$$D_3 = (3-a) D_2 = (3-a)(2-a);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} (m-a).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

Зазначимо, що наведені нижче визначники можна обчислити і методом зведення до трикутного вигляду.

5.05.01. $$D_n=\begin{vmatrix} 2n-1 & n & n & \cdots & n \\ 1 & 2n-3 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1 & 2n-5 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=(n-1)\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=(n-1)\,!$.
5.05.02. $$D_n=\begin{vmatrix} n^2 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & (n-1)^2 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 1 & 1 & (n-2)^2 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=(n-1)^2\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=\left((n-1)\,!\right)^2$.
5.05.03. $$D_n=\begin{vmatrix} 3n-2 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 3n-5 & n-2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & 3n-8 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n=(2n-1)\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=(2n-1)\,!!$.

5.05.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^n-1 & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1}-1 & \cdots & 2^{n-1}-1 \\ 1 & 2^{n-1}-1 & 2^{n-2}-1 & \cdots & 2^{n-2}-1 \\ 1 & 1 & 2^{n-2}-1 & \cdots & 2^{n-3}-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = 2^{n-1} \cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5.05.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-2} & \cdots & 2^{n-2} \\ 1 & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 2^{n-3} \\ 1 & 1 & 2^{n-3} & \cdots & 2^{n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = 2^{n-2} \cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

5.05.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & n-1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = (-1) \cdot (n-1) \cdot D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$.

Приклад 5.06.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & a & a^2+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2+b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+b & ab \\ 0 & a & a^2+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & a & a^2+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2+b \end{vmatrix} = \left| \; II - a \cdot I \to II \; \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & a & a^2+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2+b \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний} \\ \text{множник } b \text{ з другого} \\ \text{рядка за знак визна-} \\ \text{чника} \end{array} \right| =$$

$$= b \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & a^2+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2+b \end{vmatrix} = b \cdot D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші $\begin{cases} D_1 = 1; \\ D_n = b \cdot D_{n-1}. \end{cases}$

$$D_2 = bD_1 = b;$$

$$D_3 = bD_2 = b^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n = b^{n-1}.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.06.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n = 1$.
5.06.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n = 1$.
5.06.03. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ c & ac+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & c & ac+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ac+b \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ c & ac+b & ab \\ 0 & c & ac+b \end{vmatrix}$, $D_n = b^{n-1}$.

5.06.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ c & ac+b & ac+ab & \cdots & ac+ab \\ 0 & c & ac+b & \cdots & ac+ab \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ac+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ c & ac+b & ac+ab \\ 0 & c & ac+b \end{vmatrix}$, $D_n = b^{n-1}$.

5.06.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 11 & 15 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 11 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 11 & 15 \\ 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}$, $D_n = 5^{n-1}$.

5.06.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 11 & 21 & \cdots & 21 \\ 0 & 2 & 11 & \cdots & 21 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 21 \\ 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}$, $D_n = 5^{n-1}$.

Приклад 5.07.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & b-a^2 & ab & \cdots & 0 \\ 0 & -a & b-a^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a^2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ -a & b-a^2 & ab \\ 0 & -a & b-a^2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & b-a^2 & ab & \cdots & 0 \\ 0 & -a & b-a^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a^2 \end{vmatrix} = \left| \, II + aI \to II \, \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & -a & b-a^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний} \\ \text{множник } b \text{ з другого} \\ \text{рядка за знак визна-} \\ \text{чника} \end{array} \right| = b \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & -a & b-a^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a^2 \end{vmatrix} = b \cdot D_{n-1}.$$

Взявши до уваги початкову умову $D_1 = 1$, остаточно маємо $D_n = b^{n-1}$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.07.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_n = 1$.
5.07.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_n = 1$.
5.07.03. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -c & b-ac & ab & \cdots & 0 \\ 0 & -c & b-ac & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-ac \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ -c & b-ac & ab \\ 0 & -c & b-ac \end{vmatrix}$, $D_n = b^{n-1}$.

5.07.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -c & b-ac & ab-ac & \cdots & ab-ac \\ 0 & -c & b-ac & \cdots & ab-ac \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-ac \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ -c & b-ac & ab-ac \\ 0 & -c & b-ac \end{vmatrix}$, $D_n = b^{n-1}$.

5.07.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 1 & 14 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = 7^{n-1}$.

5.07.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -3 & 1 & 8 & \cdots & 8 \\ 0 & -3 & 1 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = 7^{n-1}$.

Приклад 5.08.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b & \cdots & a+nb \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+b & a+2b \\ a+3b & a+2b & a+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a+b$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a+2b \\ a+2b & a+b \end{vmatrix} = \left| I+II \to I \right| = \begin{vmatrix} 2a+3b & 2a+3b \\ a+2b & a+b \end{vmatrix} = -b\cdot\left(2a+3b\right)$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+b & a+2b \\ a+3b & a+2b & a+b \end{vmatrix} = \left| I+III \to I \right| = \begin{vmatrix} 2a+4b & 2a+4b & 2a+4b \\ a+2b & a+b & a+2b \\ a+3b & a+2b & a+b \end{vmatrix} =$

$$= \left| \begin{array}{l} II+III =< 2a+5b,\ 2a+3b,\ 2a+3b >, \\ I - \dfrac{2a+4b}{2a+3b}\left(II+III\right) \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+4b-\dfrac{2a+4b}{2a+3b}\left(2a+5b\right) & 0 & 0 \\ a+2b & a+b & a+2b \\ a+3b & a+2b & a+b \end{vmatrix}.$$

$$D_3 = -2b\frac{2a+4b}{2a+3b}\cdot D_2 = 2b^2\cdot\left(2a+4b\right).$$

Випадок, коли $n > 2$. Розглянемо дві версії розв'язування даної задачі.

1-а версія.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b & \cdots & a+nb \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

Відзначимо наступну властивість даного визначника:

$$\begin{cases} I+N =< 2a+(n+1)b,\ 2a+(n+1)b, \cdots, 2a+(n+1)b >, \\ II+N =< 2a+(n+2)b,\ 2a+nb, \quad \cdots, 2a+nb \quad >. \end{cases}$$

Тому, $D_n = \left| \ I+N-\dfrac{2a+(n+1)b}{2a+nb}(II+N) \to I \ \right| =$

$$= \begin{vmatrix} (2a+(n+1)b)\dfrac{-2b}{2a+nb} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

Таким чином, $D_n = -2b\dfrac{2a+(n+1)b}{2a+nb}D_{n-1}$. Взявши до уваги початковуумову $D_1 = a+b$,отримаємо $D_n = (-1)^{n-1}(2b)^{n-1}\dfrac{2a+(n+1)b}{2}$. Це співвідношення справедливе для будь-якого натурального n.

2-а версія.

$$D_n = \left| \ I+N \to I \right| = \begin{vmatrix} 2a+(n+1)b & 2a+(n+1)b & 2a+(n+1)b & \cdots & 2a+(n+1)b \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{винесемо спільний}\\ \text{множник } \dfrac{2a+(n+1)b}{b}\\ \text{з першого рядка за}\\ \text{знак визначника}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2a+(n+1)b}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\ I+II\to I\ \right|=$$

$$=\frac{2a+(n+1)b}{b}\begin{vmatrix} a+b+2b & a+2b & a+3b & \cdots & a+nb \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2a+(n+1)b}{b}\left(\begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b & \cdots & a+nb \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 2b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{2a+(n+1)b}{b}\cdot\left(D_n+2b\cdot D_{n-1}\right),$$

$$D_n = \frac{2a+(n+1)b}{b}\cdot\left(D_n + 2b\cdot D_{n-1}\right)$$

$$-\frac{2a+nb}{b}\cdot D_n = 2\cdot\left(2a+(n+1)b\right)\cdot D_{n-1},$$

$$D_n = -2b\cdot\frac{2a+(n+1)b}{2a+nb}\cdot D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_1 = a+b; \\ D_n = -2b\cdot\dfrac{2a+(n+1)b}{2a+nb}\cdot D_{n-1}. \end{cases}$$

$$D_2 = -2b\cdot\frac{2a+3b}{2a+2b}\cdot D_1 = -2b\cdot\frac{2a+3b}{2a+2b}\cdot(a+b) = -2b\cdot\frac{2a+3b}{2}\;;$$

$$D_3 = -2b\cdot\frac{2a+4b}{2a+3b}\cdot D_2 = -2b\cdot\frac{2a+4b}{2a+3b}\cdot(-2b)\cdot\frac{2a+3b}{2} = (-2b)^2\cdot\frac{2a+4b}{2};$$

…………………………………………………………

Остаточно маємо $D_n = (-1)^{n-1}(2b)^{n-1}\dfrac{2a+(n+1)b}{2}$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

5.08.01.

$$D_n = Det\left(1+|\,i-j\,|\right)_1^n.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -2\dfrac{n+1}{n}D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$.

5.08.02.

$$D_n = Det\left(1+2\left|\, i-j \,\right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 3 & 1 & 3 & \cdots & 2n-3 \\ 5 & 3 & 1 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -2\dfrac{n}{n-1} D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1} 4^{n-1} n$.

5.08.03.

$$D_n = Det\left(3+\left|\, i-j \,\right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 5 & 4 & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+2 & n+1 & n & \cdots & 3 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $D_n = -2\dfrac{n+5}{n+4} D_{n-1}$, $D_1 = 3$, $D_n = (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n+5)$.

5.08.04.

$$D_n = Det\left(3\left|\, i-j \,\right| - 2\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & \cdots & 3n-5 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 3n-8 \\ 4 & 1 & -2 & \cdots & 3n-11 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n-5 & 3n-8 & 3n-11 & \cdots & -2 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $D_n = -6\dfrac{3n-7}{3n-10} D_{n-1}$, $D_1 = -2$.

$D_n = (-1)^{n-1} 6^{n-1} \dfrac{3n-7}{2}$.

5.08.05.

$$D_n = Det\left(5\cdot\left| i-j \right|-1\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 9 & \cdots & 5n-6 \\ 4 & -1 & 4 & \cdots & 5n-11 \\ 9 & 4 & -1 & \cdots & 5n-16 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5n-6 & 5n-11 & 5n-16 & \cdots & -1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 4 & -1 & 4 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, $D_n = -10\dfrac{5n-7}{5n-12}\cdot D_{n-1}$, $D_1 = -1$,

$D_n = (-1)^{n-1}10^{n-1}\dfrac{5n-7}{2}$.

5.08.06.

$$D_n = Det\left(\left| i-j \right|+a\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a+1 & \cdots & a+(n-1) \\ a+1 & a & \cdots & a+(n-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1) & a+(n-2) & \cdots & a \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a & a+1 \\ a+2 & a+1 & a \end{vmatrix}$, $D_1 = a$,

$D_n = -2\dfrac{2a+n-1}{2a+n-2}\cdot D_{n-1}$, $D_2 = -2a-1$, $D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\cdot(2a+n-1)$.

Приклад 5.09.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень

$$D_n = Det\left(\left| i^2 - j^2 \right|\right)_1^n .$$

Розв'язання

Обчислюємо елементи визначника симетричної матриці:

$a_{11} = \left|1^2 - 1^2\right| = 0,\ a_{22} = \left|2^2 - 2^2\right| = 0,\ \ldots,\ a_{nn} = \left|n^2 - n^2\right| = 0,$

$a_{12} = a_{21} = \left|1^2 - 2^2\right| = 3,$

$a_{13} = a_{31} = \left|1^2 - 3^2\right| = 8,$

$a_{14} = a_{41} = \left|1^2 - 4^2\right| = 15,$

$a_{1,n-1} = a_{n-1,1} = \left|1^2 - (n-1)^2\right| = n^2 - 2n,$

$a_{1n} = a_{n1} = \left|1^2 - n^2\right| = n^2 - 1,$

$a_{23} = a_{32} = \left|2^2 - 3^2\right| = 5,$

$a_{24} = a_{42} = \left|2^2 - 4^2\right| = 12,$

$a_{2,n-1} = a_{n-1,2} = \left|2^2 - (n-1)^2\right| = n^2 - 2n - 3,$

$a_{2n} = a_{n2} = \left|2^2 - n^2\right| = n^2 - 4,$

$a_{34} = a_{43} = \left|3^2 - 4^2\right| = 7,$

$a_{3,n-1} = a_{n-1,3} = \left|3^2 - (n-1)^2\right| = n^2 - 2n - 8,$

$a_{3n} = a_{n3} = \left|3^2 - n^2\right| = n^2 - 9,$

$a_{4,n-1} = a_{n-1,4} = \left|4^2 - (n-1)^2\right| = n^2 - 2n - 15,$

$a_{4n} = a_{n4} = \left|4^2 - n^2\right| = n^2 - 16,$

$a_{n-1,n} = a_{n,n-1} = \left|(n-1)^2 - n^2\right| = 2n - 1.$

Отримаємо:

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 & \dots & n^2-2n & n^2-1 \\ 3 & 0 & 5 & 12 & \dots & n^2-2n-3 & n^2-4 \\ 8 & 5 & 0 & 7 & \dots & n^2-2n-8 & n^2-9 \\ 15 & 12 & 7 & 0 & \dots & n^2-2n-15 & n^2-16 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-2n & n^2-2n-3 & n^2-2n-8 & n^2-2n-15 & \dots & 0 & 2n-1 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & n^2-16 & \dots & 2n-1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = 0$.

*2. $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-9$.

*3. $D_3=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}=\left| I+III\to III \right|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}=$

$$=\left| \begin{matrix} I+II=<3,3,13>, \\ III-\frac{8}{3}\cdot\left(I+II\right)\to III \end{matrix} \right|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8-\frac{8}{3}\cdot 13 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(8-\frac{8}{3}\cdot 13\right)\cdot D_2=-8\cdot\frac{10}{3}\cdot 9=-240 \cdot$$

При $n > 2$:

*n.

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 & \dots & n^2-2n & n^2-1 \\ 3 & 0 & 5 & 12 & \dots & n^2-2n-3 & n^2-4 \\ 8 & 5 & 0 & 7 & \dots & n^2-2n-8 & n^2-9 \\ 15 & 12 & 7 & 0 & \dots & n^2-2n-15 & n^2-16 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-2n & n^2-2n-3 & n^2-2n-8 & n^2-2n-15 & \dots & 0 & 2n-1 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & n^2-16 & \dots & 2n-1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Відзначимо наступну властивість даного визначника:

$$\begin{cases} I+N \quad =< \quad n^2-1, \quad n^2-1,\cdots, \quad n^2-1, \quad n^2-1>, \\ I+\left(N-I\right)=<n^2-2n,\, n^2-2n,\cdots,\, n^2-2n,\, n^2+2n-2>. \end{cases}.$$

Тому, $D_n = \left| N + I - \frac{n^2-1}{n^2-2n}\left(I + \left(N - I\right)\right) \to N \right| =$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 & \dots & n^2-2n & n^2-1 \\ 3 & 0 & 5 & 12 & \dots & n^2-2n-3 & n^2-4 \\ 8 & 5 & 0 & 7 & \dots & n^2-2n-8 & n^2-9 \\ 15 & 12 & 7 & 0 & \dots & n^2-2n-15 & n^2-16 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-2n & n^2-2n-3 & n^2-2n-8 & n^2-2n-15 & \dots & 0 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{n^2-1}{n^2-2n}\cdot 2\cdot(2n-1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{n^2-1}{n^2-2n}\cdot 2\cdot\left(2n-1\right)\cdot D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_2 = -9, \\ D_n = \dfrac{-2(n-1)(n+1)(2n-1)}{n(n-2)} D_{n-1}. \end{cases}$$

$$D_3 = \frac{-2\cdot 2\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 1}\cdot D_2 = \frac{-2\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot(-9)}{3\cdot 1} =$$

$$= (-1)^2\cdot 2\cdot(5\cdot 3\cdot 1)\cdot 8 = (-1)^2\cdot 2^1\cdot\left(3^2-1\right)\cdot 5!!,$$

$$D_4 = \frac{-2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 2} D_3 = \frac{-2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{\cancel{4\cdot 2}}\cdot(-1)^2\cdot 2^1\cdot\cancel{\left(3^2-1\right)}\cdot 5!! =$$

$$= (-1)^3\cdot 2^2\cdot(7\cdot 5!!)\cdot 15 = (-1)^3\cdot 2^2\left(4^2-1\right)\cdot 7!!,$$

…………………

$$D_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\left(n^2-1\right)\cdot(2n-1)!!.$$

Це співвідношення справедливе для будь-якого натурального n.

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

5.09.01.

$$D_n = Det\left(2+\left| i^2 - j^2 \right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 10 & \cdots & n^2+1 \\ 5 & 2 & 7 & \cdots & n^2-2 \\ 10 & 7 & 2 & \cdots & n^2-7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2+1 & n^2-2 & n^2-7 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 2 & 5 \\ 10 & -5 & 2 \end{vmatrix}$, $D_n = -2\dfrac{(2n-1)(n^2+3)}{n^2-2n+4} D_{n-1}$, $D_1 = 2$.

$$D_n = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \cdot \left(n^2+3\right) \cdot (2n-1)!! .$$

5. 09.02.

$$D_n = Det\left(1+3\cdot\left| i^2 - j^2 \right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 25 & \cdots & 3n^2-2 \\ 10 & 1 & 16 & \cdots & 3n^2-11 \\ 25 & 16 & 1 & \cdots & 3n^2-26 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n^2-2 & 3n^2-11 & 3n^2-26 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 25 \\ 10 & 1 & 16 \\ 25 & 16 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -6\dfrac{(2n-1)(3n^2-1)}{3\left(n-1\right)^2-1} D_{n-1}$, $D_1 = 1$.

$$D_n = (-1)^{n-1} 6^{n-1} \frac{3n^2-1}{2} (2n-1)!! .$$

5. 09.03.

$$D_n = Det\left(\left| i^2 - j^2 \right| - 2\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 & \cdots & n^2-3 \\ 1 & -2 & 3 & \cdots & n^2-6 \\ 6 & 3 & -2 & \cdots & n^2-11 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-3 & n^2-6 & n^2-11 & \cdots & -2 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $D_1 = -2$, $D_2 = 3$,

$D_n = -2\dfrac{n^2-5}{(n-1)^2-5}\cdot(2n-1)\cdot D_{n-1}$, $D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\cdot\left(n^2-5\right)(2n-1)!!$.

5. 09.04.

$$D_n = Det\left(\left| i^3 - j^3 \right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 26 & \cdots & n^3-1 \\ 7 & 0 & 19 & \cdots & n^3-8 \\ 26 & 19 & 0 & \cdots & n^3-27 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^3-1 & n^3-8 & n^3-27 & \cdots & 0 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 26 \\ 7 & 0 & 19 \\ 26 & 19 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -49$,

$$D_n = -2\frac{n^3-1}{(n-1)^3-1}\left(3n^2-3n+1\right)\cdot D_{n-1},$$

$$D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\left(n^3-1\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(3m^2-3m+1\right).$$

5. 09.05.

$$D_n = Det\left(2+\left| i^3 - j^3 \right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 9 & \cdots & n^3+1 \\ 9 & 2 & \cdots & n^3-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^3+1 & n^3-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 28 \\ 9 & 2 & 25 \\ 28 & 25 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = -77$,

$$D_n = -2\frac{n^3+3}{(n-1)^3+3}\left(3n^2-3n+1\right)D_{n-1},$$

$$D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\left(n^3+3\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(3m^2-3m+1\right).$$

5. 09.06.

$$D_n = Det\left(2\cdot\left| i^3 - j^3 \right| - 1\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 13 & \cdots & 2n^3-3 \\ 13 & -1 & \cdots & 2n^3-17 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n^3-3 & 2n^3-17 & \cdots & -1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 13 & 51 \\ 13 & -1 & 37 \\ 51 & 37 & -1 \end{vmatrix}$, $D_1 = -1$, $D_2 = -168$,

$$D_n = -4\frac{n^3-2}{(n-1)^3-2}\left(3n^2-3n+1\right)\cdot D_{n-1},$$

$$D_n = (-1)^{n-1}4^{n-1}\left(n^3-2\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(3m^2-3m+1\right).$$

5.09.07.

$$D_n = Det\left(\left| i^3 - j^3 \right|\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 80 & \cdots & n^4-1 \\ 15 & 0 & 65 & \cdots & n^4-16 \\ 80 & 65 & 0 & \cdots & n^4-81 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^4-1 & n^4-16 & n^4-81 & \cdots & 0 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 80 \\ 15 & 0 & 65 \\ 80 & 65 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -225$,

$$D_n = -2\frac{n^4-1}{(n-1)^4-1}\left(4n^3-6n^2+4n-1\right)\cdot D_{n-1},$$

$$D_3 = 156000, \quad D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\left(n^4-1\right)\cdot\prod_{m=2}^{n}\left(4m^3-6m^2+4m-1\right).$$

5.09.08.

$$D_n = Det\left(\left| i^3 - j^3 \right| - 2\right)_1^n .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 13 & 78 & \cdots & n^4-3 \\ 13 & -2 & 63 & \cdots & n^4-18 \\ 78 & 63 & -2 & \cdots & n^4-83 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^4-3 & n^4-18 & n^4-83 & \cdots & -2 \end{vmatrix} .$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 13 & 78 \\ 13 & -2 & 63 \\ 78 & 63 & -2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = -165$,

$$D_n = -2\frac{n^4-5}{(n-1)^4-5}\left(4n^3-6n^2+4n-1\right)\cdot D_{n-1},$$

$$D_3 = 148200, \quad D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}\left(n^4-5\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{m=2}^{n}\left(4m^3-6m^2+4m-1\right) .$$

Приклад 5.10.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{m-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_3 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_2 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1$

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left| I - \dfrac{a_2}{a_1} II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_2 - b_2 \cdot \dfrac{a_2}{a_1} & 0 \\ b_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_2$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_3 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_2 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left| I - \dfrac{a_3}{a_2} II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_3 - b_3 \cdot \dfrac{a_3}{a_2} & 0 & 0 \\ b_3 & a_2 & a_2 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix} = \left(a_3 - b_3 \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \right) \cdot D_2$.

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{m-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \left| I - \frac{a_n}{a_{n-1}} II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n - b_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{m-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \left(a_n - b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \cdot D_{n-1}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_1 = a_1, \\ D_n = \left(a_n - b_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \right) \cdot D_{n-1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \left(a_{n-1} - b_n \right) \cdot D_{n-1} \cdot . \end{cases}$$

$$D_2 = \frac{a_2}{a_1}\left(a_1 - b_2\right) D_1 = a_2\left(a_1 - b_2\right),$$

$$D_3 = \frac{a_3}{a_2}\left(a_2 - b_3\right) D_2 = \frac{a_3}{\cancel{a_2}}\left(a_2 - b_3\right) \cdot \cancel{a_2}\left(a_1 - b_2\right) = a_3 \prod_{m=2}^{3}\left(a_{m-1} - b_m\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$D_n = a_n \cdot \prod_{m=2}^{n}\left(a_{m-1} - b_m\right).$$

Якщо $b_k = a_{k-1}, \left(k \le n\right)$, то $D_n = 0$. Так, наприклад, якщо покласти $a_n = 2n - 1$ і $b_n = n$, то $b_3 = a_2 = 3$. Тому, $D_1 = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, у той час, як $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ... , $D_n = 0, \left(n \ge 3\right)$.

Вправи

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

5.10.01.

$$a_n = n + 2, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & n+2 & n+2 & \cdots & n+2 \\ n & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ n & n-1 & n & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -2, \\ D_3 = 3. \end{matrix}$ $D_n = \dfrac{n+2}{n+1} \cdot D_{n-1}$. $D_n = \left(n + 2\right)$.

5.10.02.

$$a_n = n + a, (a > 1), \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+a & n+a & n+a & \cdots & n+a \\ n & n+a-1 & n+a-1 & \cdots & n+a-1 \\ n & n-1 & n+a-2 & \cdots & n+a-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & a+1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 \\ 3 & a+2 & a+2 \\ 3 & 2 & a+1 \end{vmatrix}$, $D_1 = a+1,$ $D_2 = (a+2)\cdot(a-1),$ $D_3 = (a+3)\cdot(a-1)^2$.

$D_n = (a-1)\cdot\dfrac{n+a}{n+a-1}\cdot D_{n-1}$. $D_n = (a-1)^{n-1}\cdot(n+a)$.

5.10.03.

$$a_n = 2n+1, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \\ n & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ n & n-1 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3,$ $D_2 = 5,$ $D_3 = 14.$ $D_n = (n-1)\cdot\dfrac{2n+1}{2n-1}\cdot D_{n-1}$.

$D_n = (2n+1)\cdot(n-1)!$.

5.10.04.

$$a_n = 2n+3, \quad b_n = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+3 & 2n+3 & 2n+3 & \cdots & 2n+3 \\ 2n-1 & 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5,$ $D_2 = 14,$ $D_3 = 36.$ $D_n = 2\cdot\dfrac{2n+3}{2n+1}\cdot D_{n-1}$. $D_n = (2n+3)\cdot 2^{n-1}$.

5.10.05.

$$a_n = 3n-2\,,\;\; b_n = 2n-1\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-2 & 3n-2 & \cdots & 3n-2 \\ 2n-1 & 3n-5 & 3n-5 & \cdots & 3n-5 \\ 2n-1 & 2n-3 & 3n-8 & \cdots & 3n-8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -8, \\ D_3 = 14. \end{matrix}$ $D_n = (n-4)\cdot\dfrac{3n-2}{3n-5}\cdot D_{n-1}$. $D_n = 0, (n>3)$.

5.10.06.

$$a_n = 4n-3\,,\;\; b_n = 3n-2\,,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 4n-3 & 4n-3 & \cdots & 4n-3 \\ 3n-2 & 4n-7 & 4n-7 & \cdots & 4n-7 \\ 3n-2 & 3n-5 & 4n-11 & \cdots & 4n-11 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n-2 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -15, \\ D_3 = 54. \end{matrix}$ $D_n = (n-5)\cdot\dfrac{4n-3}{4n-7}\cdot D_{n-1}$. $D_4 = -78$,

$D_n = 0, (n>4)$.

§ 6. Неоднорідні рекурентні співвідношення першого порядку

Тут розглядаються визначники n-го порядку, для яких можна побудувати рекурентне співвідношення вигляду:

$$D_n = p(n)\cdot D_{n-1} + q(n). \qquad (6.1)$$

Це співвідношення називається неоднорідним рекурентним співвідношенням першого порядку. Відповідне однорідне рекурентне співвідношення: $U_n = p(n)\cdot U_{n-1}$. Як було показано раніше, його розв'язок має вигляд $U_n = U_1 \prod_{m=2}^{n} p(m)$. Спираючись на цьому, припустимо, що $D_n = Z_n \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m)$. Тоді $Z_1 = D_1$ і після підстановки рекурентне співвідношення (4.1) зводиться до канонічного вигляду:

$$Z_n = Z_{n-1} + \frac{q(n)}{\prod_{m=2}^{n} p(m)}.$$

Нехай $s(k) = \dfrac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)}$, тоді $Z_n = Z_{n-1} + s(n)$. Отже,

$$\begin{cases} Z_1 = D_1, \\ Z_2 = D_1 + s(2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_n = D_1 + s(2) + \ldots + s(n). \end{cases}$$

Звідси, формула загального члена знайдемо за принципом математичної індукції $Z_n = D_1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)}$. Матимемо:

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right).$$

Метод розв'язування рекурентного співвідношення $D_n = p(n)\cdot D_{n-1} + q(n)$ такий .

Припустивши, що $D_n = Z_n \prod_{m=2}^{n} p(m)$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення

$$Z_n \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) = p(n) \cdot Z_{n-1} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} p(m) + q(n),$$

$$Z_n \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) = Z_{n-1} \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) + q(n) \Bigg| \quad \div \prod_{m=2}^{n} p(m),$$

$$Z_n = Z_{n-1} + \frac{q(n)}{\prod_{m=2}^{n} p(m)}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n = Z_{n-1} + \dfrac{q(n)}{\prod_{m=2}^{n} p(m)}, \\ Z_1 = D_1. \end{cases}$$

$$Z_2 = Z_1 + \frac{q(2)}{p(2)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)},$$

$$Z_4 = Z_3 + \frac{q(4)}{\prod_{m=2}^{4} p(m)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)} + \frac{q(3)}{p(2)p(3)} + \frac{q(4)}{p(2)p(3)p(4)},$$

$$Z_3 = Z_2 + \frac{q(3)}{\prod_{m=2}^{3} p(m)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)} + \frac{q(3)}{p(2)p(3)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$Z_n = D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)}.$$

Остаточно маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right).$$

Розглянемо деякі випадки.

№	*Коефіцієнти*	*Рекурентні співвідношення*	*Загальний розв'язок*
1	$p(n)=1,\ q(n)=q$	$D_n = D_{n-1}+q$	$D_n = D_1+(n-1)q$
2	$p(n)=p\neq 1,\ q(n)=q$	$D_n = pD_{n-1}+q$	$D_n = p^{n-1}\cdot D_1 + q\cdot\dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}$
3	$p(n)=n,\ q(n)=q$	$D_n = nD_{n-1}+q$	$D_n = n!\cdot\left(D_1+q\cdot\sum\limits_{m=2}^{n}\dfrac{1}{m!}\right)$

Приклад 6.01.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n=\begin{vmatrix} r_n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & r_{n-1} & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & r_{n-2} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_1 \end{vmatrix},\ \text{де}\ r_k\neq 1,\ \ k=\overline{1,n}\,;\ D_3=\begin{vmatrix} r_3 & 1 & 1\\ 1 & r_2 & 1\\ 1 & 1 & r_1\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = r_1$.

*2. $D_2=\begin{vmatrix} r_2 & 1\\ 1 & r_1\end{vmatrix}=r_1r_2-1$.

*3. $$D_3=\begin{vmatrix} r_3 & 1 & 1\\ 1 & r_2 & 1\\ 1 & 1 & r_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_3-1 & 0 & 0\\ 1 & r_2 & 1\\ 1 & 1 & r_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & r_2 & 1\\ 1 & 1 & r_1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{для другого}\\ \text{визначника}\\ II-I\to II\\ III-I\to III\end{matrix}\right|=$$

$$=(r_3-1)\cdot D_2+(r_2-1)\cdot(r_1-1)=\left(\frac{r_1}{r_1-1}+\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{r_m-1}\right)\cdot\prod_{m=1}^{3}(r_m-1).$$

$$D_3=\left(\frac{r_1}{r_1-1}+\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{r_m-1}\right)\cdot\prod_{m=1}^{3}(r_m-1).$$

Загальний випадок.

$$*\text{n.}\quad D_n = \begin{vmatrix} r_n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний ви-} \\ \text{значник у вигляді} \\ \text{суми двох визначни-} \\ \text{ків} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} r_n - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & r_{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для другого визначника:} \\ \text{перший рядок віднімемо} \\ \text{від кожного з решти рядків} \end{array} \right| =$$

$$= (r_n - 1) \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & r_{n-1} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_{n-2} - 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r_n - 1) \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n-1} (r_m - 1).$$

Отже, $D_n = (r_n - 1) \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n-1} (r_m - 1)$, де $D_1 = r_1$, $p(n) = r_n - 1$, $q(n) = \prod_{m=1}^{n-1} (r_m - 1)$. Використовуючи формулу $D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right)$, дістанемо:

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} (r_m - 1) \cdot \left(r_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k-1} (r_m - 1)}{\prod_{m=2}^{k} (r_m - 1)} \right) = \prod_{m=2}^{n} (r_m - 1) \cdot \left(r_1 + (r_1 - 1) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{r_k - 1} \right).$$

Остаточно маємо $D_n = \prod_{m=1}^{n}(r_m - 1)\cdot\left(\frac{r_1}{r_1 - 1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{r_k - 1}\right)$.

Розглянутий визначник цікавий тим, що деякі інші визначники за допомогою перетворень (винесення спільного множника рядка або стовпця) можна звести до вигляду даного визначника.

Нехай, наприклад, необхідно обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_n & a_n b_{n-1} & a_n b_{n-2} & \cdots & a_n b_1 \\ b_n a_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} & \cdots & a_{n-1} b_1 \\ b_n a_{n-2} & b_{n-1} a_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_{n-2} b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n a_1 & b_{n-1} a_1 & b_{n-2} a_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_n & a_n b_{n-1} & a_n b_{n-2} & \cdots & a_n b_1 \\ b_n a_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} & \cdots & a_{n-1} b_1 \\ b_n a_{n-2} & b_{n-1} a_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_{n-2} b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n a_1 & b_{n-1} a_1 & b_{n-2} a_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний множ-} \\ \text{ник за знак визначника:} \\ \text{з першого рядка — } a_n, \\ \text{з другого рядка — } a_{n-1}, \\ \text{..., з } n\text{-го рядка — } a_1 \end{array} \right| =$$

$$= a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_1 \begin{vmatrix} \frac{c_n}{a_n} & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ b_n & \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ b_n & b_{n-1} & \frac{c_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & \frac{c_1}{a_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{винесемо спільний множник} \\ \text{за знак визначника:} \\ \text{з першого рядка — } a_n, \\ \text{з другого рядка — } a_{n-1}, \\ \text{..., з } n\text{-го рядка — } a_1 \end{array} \right| =$$

$$= \prod_{m=1}^{n} a_m b_m \cdot \begin{vmatrix} \frac{c_n}{a_n b_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{c_{n-1}}{a_{n-1} b_{n-1}} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{c_{n-2}}{a_{n-2} b_{n-2}} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{c_1}{a_1 b_1} \end{vmatrix}.$$

Заміною $r_m = \dfrac{c_m}{a_m b_m}$ розв'язання Δ_n зводиться до розв'язання D_n: $\Delta_n = D_n \cdot \prod_{m=1}^{n} (a_m b_m)$. Отже,

$$\Delta_n = \prod_{m=1}^{n} (c_m - a_m b_m) \cdot \left(\frac{c_1}{c_1 - a_1 b_1} + \sum_{m=2}^{n} \frac{a_m b_m}{c_m - a_m b_m} \right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.01.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 5, \\ D_3 = 17. \end{array}$ $D_n = n \cdot D_{n-1} + (n-1)!$, $D_n = n! \cdot \sum_{m=0}^{n} \dfrac{1}{m}$.

6.01.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 14, \\ D_3 = 92. \end{matrix}$ $D_n = 2n \cdot D_{n-1} + 2^{n-1}(n-1)!$,

$$D_n = 2^{n-1} \cdot n! \cdot \left(3 + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} \right).$$

6.01.03.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2n+3 & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-2} & \cdots & \frac{n}{1} \\ \frac{n-1}{n} & 2n+1 & \frac{n-1}{n-2} & \cdots & \frac{n-1}{1} \\ \frac{n-2}{n} & \frac{n-2}{n-1} & 2n-1 & \cdots & \frac{n-2}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & \frac{3}{2} & \frac{3}{1} \\ \frac{2}{3} & 7 & \frac{2}{1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 5, \\ D_2 = 34, \\ D_3 = 296. \end{matrix}$ $\Delta_n = D_n$, $r_n = 2n+3$.

$D_n = 2(n+1) \cdot D_{n-1} + 2^{n-1} n!$, $D_n = 2^{n-1} \cdot (n+1)! \cdot \left(\frac{5}{2} + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m+1} \right).$

Приклад 6.02.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & c_n & c_n & \cdots & c_n \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & c_3 & c_3 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & c_n & c_n & \cdots & c_n \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний ви-} \\ \text{значник у вигляді} \\ \text{суми двох визначни-} \\ \text{ків} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n - c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_n & c_n & c_n & \cdots & c_n \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_n - c_n) \cdot D_{n-1} + c_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} II - b_{n-1} \cdot I \to II \\ III - b_{n-2} \cdot I \to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N - b_1 \cdot I \to N \end{array} \right| =$$

$$= (a_n - c_n) \cdot D_{n-1} + c_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_{n-1} - b_{n-1} & c_{n-1} - b_{n-1} & \cdots & c_{n-1} - b_{n-1} \\ 0 & 0 & a_{n-2} - b_{n-2} & \cdots & c_{n-2} - b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 - b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_n - c_n) \cdot D_{n-1} + c_n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (a_m - b_m).$$

Ми отримали рекурентне співвідношення

$$D_n = (a_n - c_n) \cdot D_{n-1} + c_n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (a_m - b_m),$$

де $D_1 = a_1$, $p(n) = a_n - c_n$, $q(n) = c_n \prod_{m=1}^{n-1} (a_m - b_m)$.

Згідно з формулою $D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right)$ маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} (a_m - c_m) \cdot \left(a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k \cdot \prod_{m=1}^{k-1} (a_m - b_m)}{\prod_{m=2}^{k} (a_m - c_m)} \right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.02.01.

$$a_n = n+2, \quad b_n = n+1, \quad c_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & n & n & \cdots & n \\ n & n+1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n-1 & n & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 3, \\ D_2 = 8, \\ D_3 = 19. \end{array}$

$$D_n = 2 \cdot D_{n-1} + n, \quad D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{2^m} \right) \cdot 2^n.$$

6.02.02.

$$a_n = n+1,\quad b_n = n,\quad c_n = n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & n-2 & \cdots & n-2 \\ n-2 & n-2 & n-1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 5, \\ D_3 = 12. \end{matrix}$

$D_n = 2\cdot D_{n-1} + n - 1,\ D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m-1}{2^m}\right)\cdot 2^n.$

6.02.03.

$$a_n = n,\quad b_n = n+2,\quad c_n = n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ n+1 & n-1 & n & \cdots & n \\ n & n & n-2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -7, \\ D_3 = 23. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-1} + (n+1)\cdot(-2)^{n-1}$,

$D_n = \left(1 + \sum_{m=2}^{n} \left((m+1)\cdot 2^{n-1}\right)\right)\cdot(-1)^{n-1}.$

6.02.04.

$$a_n = 2n+1, \quad b_n = n+1, \quad c_n = n \ ,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n-1 & 2n-3 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 3, \\ D_2 = 11, \\ D_3 = 50. \end{array}$ $D_n = (n+1)\cdot D_{n-1} + n\,!$,

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+1}\right)\cdot (n+1)\,!\,.$$

6.02.05.

$$a_n = 2n+1, \quad b_n = 2n-1, \quad c_n = n \ ,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & n & \cdots & n \\ 2n-3 & 2n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 2n-5 & 2n-5 & 2n-3 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 3, \\ D_2 = 13, \\ D_3 = 64. \end{array}$ $D_n = (n+1)\cdot D_{n-1} + n\cdot 2^{n-1}$,

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m\cdot 2^{m-1}}{(m+1)\,!}\right)\cdot (n+1)\,!\,.$$

6.02.06.

$$a_n = 3n-1, \quad b_n = 2n-1, \quad c_n = n\ ,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & n & n & \cdots & n \\ 2n-3 & 3n-4 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 2n-5 & 2n-5 & 3n-7 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 8, \quad D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1} + n\,!\,, \\ D_3 = 46. \end{array}$

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m\,!}{(2m-1)\,!!}\right)\cdot(2n-1)\,!!\,.$$

Приклад 6.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{запишемо даний ви-}\\ \text{значник у вигляді}\\ \text{суми двох визначників}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=$$

$$=a_n\cdot D_{n-1}+b_n\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 1 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 1 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{елементарні перетворення}\\ \text{зі стовпцями}\\ \\ K-a_{n+1-k}\cdot I\to K,\quad K=\overline{2,n}\end{array}\right|=$$

$$=a_n\cdot D_{n-1}+b_n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}=a_n\cdot D_{n-1}+b_n\cdot\ldots\cdot b_2 b_1\cdot$$

$$D_n=a_n\cdot D_{n-1}+b_n\cdot\ldots\cdot b_2 b_1\,.$$

Ми отримали неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку $D_n=a_nD_{n-1}+\prod_{m=1}^{n}b_m$, де $D_1=a_1+b_1$, $p(n)=a_n$, $q(n)=\prod_{m=1}^{n}b_m$.

Згідно з формулою $D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right)$ маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} a_m \cdot \left(a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} b_m}{\prod_{m=2}^{k} a_m} \right) = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} a_m \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} b_m}{\prod_{m=1}^{k} a_m} \right),$$

$$D_n = \prod_{m=1}^{n} a_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} b_m}{\prod_{m=1}^{k} a_m} \right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.03.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ x & a_{n-1} + x & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ x & x & a_{n-2} + x & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_1 + x \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + x & a_2 & a_1 \\ x & a_2 + x & a_1 \\ x & x & a_1 + x \end{vmatrix}$, $D_1 = x + a_1$. $D_2 = x^2 + xa_2 + a_2 a_1$,

$D_3 = x^3 + x^2 a_3 + x a_3 a_2 + a_3 a_2 a_1$, $D_n = a_n D_{n-1} + x^n$,

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{x^m}{\prod_{i=1}^{m} a_i} \right) \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

6.03.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & n & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 5$, $D_3 = 16$, $D_n = nD_{n-1} + 1$.

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\right) n!$.

6.03.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2 & 2n-1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 13$, $D_3 = 73$, $D_n = (2n-1)D_{n-1} + 2^n$,

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m}{(2m-1)!!}\right)(2n-1)!!$.

6.03.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 3n-4 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$. $D_2 = 7$, $D_3 = 36$, $D_n = nD_{n-1} + (2n-1)!!$,

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(2m-1)!!}{m!}\right) n!$.

6.03.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 12$, $D_3 = 60$, $D_n = n \cdot D_{n-1} + (n+1)!$,

$D_n = \dfrac{(n+2)!}{2}$.

6.03.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ n & n+1 & 2 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 8$, $D_3 = 22$, $D_n = 2D_{n-1} + n!$,

$D_n = 2^n \cdot \sum\limits_{m=0}^{n} \dfrac{m!}{2^m}$.

6.03.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^{n-1}+1 & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \\ 1 & 2^{n-2}+1 & 2^{n-3} & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2^{n-3}+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$. $D_2 = 5$, $D_3 = 21$, $D_n = 2^{n-1} D_{n-1} + 1$,

$D_n = \left(1 + \sum\limits_{m=1}^{n} 2^{-\frac{m(m-1)}{2}}\right) 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Приклад 6.04.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Це трьохдіагональний визначник. Розклавши визначник за елементами першого рядка, дістанемо однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку: $D_n = (a_n + b_n) \cdot D_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n \cdot D_{n-2}$. В наступних розділах детальніше зупинимося на рекурентних співвідношеннях другого порядку. Тут ми обчислимо трьохдіагональний визначник за допомогою рекурентного співвідношення першого порядку.

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & a_1 \\ b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{для другого} \\ \text{визначника:} \\ II\text{ - }I \to II \end{array} \right| =$$

$$= a_2 \cdot D_1 + \begin{vmatrix} b_2 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} = a_2 \cdot D_1 + b_2 b_1 = a_2 \cdot (a_1 + b_1) + b_2 b_1,$$

$$D_2 = a_1 a_2 \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \right).$$

$$\text{*3. } D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_3 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = a_3\cdot D_2 + b_3\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 1 & a_2+b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{елементарні перетворення}\\ \text{зі стовпцями:}\\ II - a_2 I \to II\end{array}\right| = a_3\cdot D_2 + b_3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & a_1 \\ 1 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3\cdot D_2 + b_3\cdot b_2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3\cdot D_2 + b_3 b_2 b_1 = a_1 a_2 a_3\cdot\left(1+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}\right) + b_3 b_2 b_1$$

$$D_n = a_1 a_2 a_3\cdot\left(1+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}+\frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}\right).$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{запишемо даний ви-}\\ \text{значник у вигляді}\\ \text{суми двох визначників}\end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{позначимо другий}\\ \text{визначник через } \Delta_n\end{matrix}\right| = a_n \cdot D_{n-1} + \Delta_n .$$

$$\Delta_n = b_n \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \ II - I \to II \right| =$$

$$= b_n \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = b_n \cdot \Delta_{n-1}$$

$$\Delta_n = \prod_{m=1}^{n} b_m$$

Ми отримали неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку $D_n = a_n D_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} b_m$, де $D_1 = a_1 + b_1$, $p(n) = a_n$, $q(n) = \prod\limits_{m=1}^{n} b_m$.

Згідно з формулою $D_n = \prod\limits_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{q(k)}{\prod\limits_{m=2}^{k} p(m)} \right)$ маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} a_m \cdot \left(a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} b_m}{\prod\limits_{m=2}^{k} a_m} \right) = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} a_m \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} b_m}{\prod\limits_{m=1}^{k} a_m} \right),$$

$$D_n = \prod_{m=1}^{n} a_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} b_m}{\prod\limits_{m=1}^{k} a_m} \right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.04.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_n+x & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x & a_{n-1}+x & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & x & a_{n-2}+x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+x \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} a_3+x & a_2 & 0 \\ x & a_2+x & a_1 \\ 0 & x & a_1+x \end{vmatrix}$, $D_1=x+a_1$.

$D_2=x^2+xa_2+a_2a_1$, $D_3=x^3+x^2a_3+xa_3a_2+a_3a_2a_1$

$D_n=a_nD_{n-1}+x^n$, $D_n=\left(1+\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{x^m}{\prod\limits_{i=1}^{m}a_i}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$.

6.04.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & n-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=4$, $D_3=10$, $D_n=D_{n-1}+n!$.

$D_n=1+\sum\limits_{m=1}^{n}m!$.

6.04.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2n-1 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 13$, $D_3 = 73$, $D_n = (2n-1)D_{n-1} + 2^n$,

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m}{(2m-1)!!}\right)(2n-1)!!\cdot$$

6.04.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & 2n-3 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 3n-4 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 3n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}\cdot$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$. $D_2 = 13$, $D_3 = 77$, $D_n = (2n-1)D_{n-1} + n!$,

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m!}{(2m-1)!!}\right)(2n-1)!!.$$

6.04.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}\cdot$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 11$, $D_3 = 45$, $D_n = (n+1)D_{n-1} + n!$,

$$D_n = (n+1)!\cdot \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1}\cdot$$

6.04.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-1}+1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2}+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a_3+1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2+1 & 1 \\ 0 & a_2 & a_1+1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = a_1+1, \\ D_2 = a_1 a_2 + a_1 + 1 \end{matrix}$.

$D_n = D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} a_m$, $D_n = \sum_{m=0}^{n} \prod_{m=0}^{n} a_m$.

6.04.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^{n-1}+1 & 2^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2^{n-2}+1 & 2^{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2^{n-3}+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$. $D_2 = 5$, $D_3 = 21$, $D_n = 2^{n-1} D_{n-1} + 1$,

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} 2^{-\frac{m(m-1)}{2}}\right) 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

6.04.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+n^2 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 1+(n-1)^2 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 1+(n-2)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 6, \\ D_3 = 42. \end{matrix}$ $D_n = D_{n-1} + (n!)^2$, $D_n = \sum_{m=0}^{n} (m!)^2$.

Приклад 6.05.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + x_n y_n & x_{n-1}y_n & x_{n-2}y_n & \cdots & x_1 y_n \\ x_n y_{n-1} & a_{n-1} + x_{n-1}y_{n-1} & x_{n-2}y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ x_n y_{n-2} & x_{n-1}y_{n-2} & a_{n-2} + x_{n-2}y_{n-2} & \cdots & x_1 y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1}y_1 & x_{n-2}y_1 & \cdots & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + x_3 y_3 & x_2 y_3 & x_1 y_3 \\ x_3 y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + x_1 y_1$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 \cdot D_1 + y_2 x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} = a_2 \cdot D_1 + y_2 x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \; II - y_1 I \to II \; \right| = a_2 \cdot D_1 + y_2 x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 \cdot (a_1 + x_1 y_1) + y_2 x_2 a_1 =$$

$$= a_2 a_1 + a_2 x_1 y_1 + a_1 x_2 y_2 = a_1 a_2 \left(1 + \frac{x_1 y_1}{a_1} + \frac{x_2 y_2}{a_2} \right), \; D_2 =$$

$$= \left(1 + \sum_{m=1}^{2} \frac{x_m y_m}{a_m} \right) \prod_{i=1}^{2} a_i .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + x_3 y_3 & x_2 y_3 & x_1 y_3 \\ x_3 y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ x_3 y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_3 y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =$$

$$
= a_3 \cdot D_2 + y_3 x_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_1 \\ y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} II - y_2 I \to II \\ III - y_1 I \to III \end{vmatrix} = a_3 \cdot D_2 + y_3 x_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 \cdot D_2 + y_3 x_3 \cdot a_1 a_2 = .
$$

$$
= a_3 \cdot \left(a_2 \cdot \left(a_1 + x_1 y_1 \right) + y_2 x_2 a_1 \right) + y_3 x_3 \cdot a_1 a_2 = a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{x_1 y_1}{a_1} + \frac{x_2 y_2}{a_2} + \frac{x_3 y_3}{a_3} \right).
$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a_n + x_n y_n & x_{n-1} y_n & x_{n-2} y_n & \cdots & x_1 y_n \\ x_n y_{n-1} & a_{n-1} + x_{n-1} y_{n-1} & x_{n-2} y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ x_n y_{n-2} & x_{n-1} y_{n-2} & a_{n-2} + x_{n-2} y_{n-2} & \cdots & x_1 y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1} y_1 & x_{n-2} y_1 & \cdots & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =$$

$= \left|\begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми двох визна-} \\ \text{чників} \end{array}\right| =$

$$
= \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_n y_{n-1} & a_{n-1} + x_{n-1} y_{n-1} & x_{n-2} y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ x_n y_{n-2} & x_{n-1} y_{n-2} & a_{n-2} + x_{n-2} y_{n-2} & \cdots & x_1 y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1} y_1 & x_{n-2} y_1 & \cdots & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} +
$$

$$
+ y_n \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ x_n y_{n-1} & a_{n-1} + x_{n-1} y_{n-1} & x_{n-2} y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ x_n y_{n-2} & x_{n-1} y_{n-2} & a_{n-2} + x_{n-2} y_{n-2} & \cdots & x_1 y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1} y_1 & x_{n-2} y_1 & \cdots & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix} =
$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{для другого ви-}\\ \text{значника}\\ K-y_{n-k+1}\cdot I\to K,\\ K=\overline{2,\,n}\end{array}\right|=$$

$$=a_nD_{n-1}+y_n\begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1\\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1\end{vmatrix}=a_nD_{n-1}+x_ny_n\prod_{i=1}^{n-1}a_i\ .$$

Ми отримали неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку

$$D_n=a_nD_{n-1}+x_ny_n\prod_{i=1}^{n-1}a_i\ ,$$

де $D_1=a_1+x_1y_1$, $p(n)=a_n$, $q(n)=x_ny_n\prod_{m=1}^{n-1}a_m$.

Згідно з формулою $D_n=\prod_{m=2}^{n}p(m)\cdot\left(D_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k}p(m)}\right)$ маємо

$$D_n=\prod_{m=2}^{n}a_m\cdot\left(a_1+x_1y_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k\prod_{m=1}^{k-1}a_m}{\prod_{m=2}^{k}a_m}\right)=$$

$$=a_1\cdot\prod_{m=2}^{n}a_m\cdot\left(1+\frac{x_1y_1}{a_1}+\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_2y_2a_1}{a_2}+\frac{x_3y_3a_1\cancel{a_2}}{\cancel{a_2}a_3}+\ldots+\frac{x_ny_na_1\cancel{a_2}\cancel{a_3}\cdot\ldots\cdot\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_2}\cancel{a_3}\cdot\ldots\cdot\cancel{a_{n-1}}a_n}\right)\right)=$$

$$=\prod_{m=1}^{n}a_m\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right),$$

$$D_n=\prod_{m=1}^{n}a_m\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.05.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_n y_n & x_{n-1}y_n & \cdots & x_1 y_n \\ x_n y_{n-1} & 1+x_{n-1}y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1}y_1 & \cdots & 1+x_1 y_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1+x_3 y_3 & x_2 y_3 & x_1 y_3 \\ x_3 y_2 & 1+x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & 1+x_1 y_1 \end{vmatrix}$,

$D_1 = 1 + x_1 y_1$, $D_2 = 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2$,

$D_n = D_{n-1} + x_n y_n$. $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} x_m y_m\right)$.

6.05.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^n y^n & x^{n-1}y^n & \cdots & xy^n \\ x^n y^{n-1} & 1+x^{n-1}y^{n-1} & \cdots & xy^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n y & x^{n-1}y & \cdots & 1+xy \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1+x^3 y^3 & x^2 y^3 & xy^3 \\ x^3 y^2 & 1+x^2 y^2 & xy^2 \\ x^3 y & x^2 y & 1+xy \end{vmatrix}$,

$D_1 = 1 + xy$, $D_2 = 1 + xy + x^2 y^2$,

$D_n = D_{n-1} + x^n y^n$. $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} x^m y^m\right)$.

6.05.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & \frac{2n-1}{2n-3} & \frac{2n-1}{2n-5} & \cdots & \frac{2n-1}{1} \\ \frac{2n-3}{2n-1} & 2 & \frac{2n-3}{2n-5} & \cdots & \frac{2n-3}{1} \\ \frac{2n-5}{2n-1} & \frac{2n-5}{2n-3} & 2 & \cdots & \frac{2n-5}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-5} & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{5}{3} & 5 \\ \frac{3}{5} & 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$, $D_n = D_{n-1} + 1$. $D_n = 1 + n$.

6.05.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & \frac{n-1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1} & 2 & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$D_3 = 4$, $D_n = D_{n-1} + 1$.

$D_n = 1 + n$.

6.05.05.

$$D_n=\begin{vmatrix} x_n+y_n & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ x_n & x_{n-1}+y_{n-1} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1+y_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} x_3+y_3 & x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2+y_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1+y_1 \end{vmatrix}$, $D_1=x_1+y_1$, $D_2=x_1y_2+x_2y_1+y_1y_2$,

$D_n=y_nD_{n-1}+x_n\prod\limits_{m=1}^{n-1}y_m$. $D_n=\left(1+\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{x_m}{y_m}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}y_i$.

6.05.06.

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n & n & n-2 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=4$, $D_3=7$, $D_n=D_{n-1}+n$.

$D_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$.

6.05.07.

$$D_n=\begin{vmatrix} n & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n+1 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $D_1=1$, $D_2=-13$, $D_3=94$,

$D_n=-(n+1)D_{n-1}+(-1)^{n-1}(2n+1)n!$. $D_n=\left(1-\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{2m+1}{m+1}\right)(-1)^n(n+1)!$.

6.05.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 12$, $D_3 = 44$, $D_n = 2D_{n-1} + (2n-1)2^{n-1}$.

$D_n = 2^n\left(1 + \dfrac{n^2}{2}\right)$.

6.05.09.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 2n & 2n-1 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 2n & 2n-2 & 2n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 3$, $D_3 = 13$, $D_n = D_{n-1} + 2n$.

$D_n = 1 + n(n+1)$.

6.05.10.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & x & x & \cdots & x \\ x & a_{n-1} & x & \cdots & x \\ x & x & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & x & x \\ x & a_2 & x \\ x & x & a_1 \end{vmatrix}$, $D_1 = a_1$, $D_2 = a_1 a_2 - x^2$,

$D_n = (a_n - x)D_{n-1} + x\prod_{m=1}^{n-1}(a_m - x)$. $D_n = \left(1 + x\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{a_m - x}\right)\prod_{m=1}^{n}(a_m - x)$.

6.05.11.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2n-2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2n-4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 7$, $D_3 = 38$,

$D_n = (2n-1)D_{n-1} + (2n-3)!!$.

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1}\right)(2n-1)!!$.

6.05.12.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 23$, $D_3 = 176$,

$D_n = (2n+1)D_{n-1} + (2n-1)!!$. $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m+1}\right)(2n+1)!!$.

6.05.13.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+\frac{1}{n} & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{n-1} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} x+\frac{1}{3} & x & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix}$, $D_1 = x+1$, $D_2 = \frac{3x+1}{2}$,

$D_n = \frac{1}{n} D_{n-1} + \frac{x}{(n-1)!}$. $D_n = \left(1 + x\frac{n(n+1)}{2}\right)\frac{1}{n!}$.

6.05.14.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 5$, $D_3 = 17$, $D_n = nD_{n-1} + (n-1)!$.

$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right) n!$.

6.05.15.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & n+1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & n & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 8$, $D_3 = 28$,

$D_n = (n+1)D_{n-1} + 2 \cdot n!$. $D_n = \left(1 + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+1}\right)(n+1)!$.

Приклад 6.06.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} z & a & a & \cdots & x \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} z & a & x \\ a & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix}, \quad z \neq a,\ az \neq xy.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix} = z^2 - xy$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} z & a & x \\ a & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-a & 0 & 0 \\ a & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & x \\ a & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix} =$

$$= (z-a)D_2 + \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & a & x \\ a & z & x \\ ay & ay & az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} II - I \to II \\ III - y \cdot I \to III \end{vmatrix} =$$

$$=(z-a)D_2+\frac{1}{a}\cdot\begin{vmatrix} a & a & x \\ 0 & z-a & 0 \\ 0 & 0 & az-xy \end{vmatrix}=(z-a)D_2+(z-a)\cdot(za-xy).$$

$$D_3=(z-a)^2\left(z+2\frac{az-xy}{z-a}\right).$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n=\begin{vmatrix} z & a & a & \cdots & x \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}=\left|\text{запишемо даний визначник у вигляді суми двох визначників}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} z-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & x \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}=$$

$$=(z-a)D_{n-1}+\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & x \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ay & ay & ay & \cdots & az \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} K-I\to K, \quad K=\overline{2,\, n-1} \\ N-y\cdot I\to N \end{matrix}\right|=$$

$$=(z-a)D_{n-1}+\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & x \\ 0 & z-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & az-xy \end{vmatrix}=$$

$$=(z-a)D_{n-1}+(z-a)^{n-2}(az-xy).$$

Таким чином, $D_n=(z-a)D_{n-1}+(z-a)^{n-2}(az-xy)$.

Припустимо, що $D_n=(z-a)^{n-1}U_n$, тоді $U_1=D_1=z$. Після підстановки рекурентне співвідношення зводиться до канонічного вигляду:

$$(z-a)^{n-1}U_n=(z-a)(z-a)^{n-2}U_{n-1}+(z-a)^{n-2}(az-xy)\Big|\div(z-a)^{n-1},$$

$$U_n=U_{n-1}+\frac{az-xy}{z-a}.$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases}U_n=U_{n-1}+\dfrac{az-xy}{z-a};\\ U_1=z,\end{cases}$$

$$U_2=U_1+\frac{az-xy}{z-a}=z+\frac{az-xy}{z-a},$$

$$U_3=U_2+\frac{az-xy}{z-a}=z+2\cdot\frac{az-xy}{z-a},$$

……………………………………,

$$U_n=z+(n-1)\cdot\frac{az-xy}{z-a}.$$

Отже, $D_n=(z-a)^{n-1}\cdot\left(z+(n-1)\cdot\dfrac{az-xy}{z-a}\right)$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.06.01.

$$D_n=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&1\\2&3&2&\cdots&1\\2&2&3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\5&5&5&\cdots&3\end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&3&1\\5&5&3\end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=4$, $D_3=5$, $D_n=D_{n-1}+1$, $D_n=n+2$.

6.06.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 1$, $D_3 = -8$, $D_n = 2D_{n-1} - 5\cdot 2^{n-2}$,

$D_n = 2^{n-1}\left[3 - (n-1)\dfrac{5}{2}\right]$.

6.06.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 2 \\ 3 & 5 & 3 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 7 & 7 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $D_2 = 11$, $D_3 = 24$, $D_n = 2D_{n-1} + 2^{n-2}$,

$D_n = 2^{n-1}\left[5 + \dfrac{n-1}{2}\right]$.

6.06.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & \sqrt{b} \\ b & a & b & \cdots & \sqrt{b} \\ b & b & a & \cdots & \sqrt{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{b} & \sqrt{b} & \sqrt{b} & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & \sqrt{b} \\ b & a & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{b} & a \end{vmatrix}$, $D_1 = a$, $D_2 = a^2 - b$, $D_3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab - 2b)$,

$D_n = (a-b)\cdot D_{n-1} + b\cdot(a-b)^{n-2}\cdot(a-1)$, $D_n = (a-b)^{n-1}\left[a + (n-1)\dfrac{b(a-1)}{a-b}\right]$.

6.06.05. $$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \sqrt{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=7$, $D_3=11$, $D_n=D_{n-1}+4$. $D_n=3+(n-1)\cdot 4$.
6.06.06. $$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 2\sqrt{2} \\ 3 & 5 & 3 & \cdots & 2\sqrt{2} \\ 3 & 3 & 5 & \cdots & 2\sqrt{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 3 & 5 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}$, $D_1=5$, $D_2=21$, $D_3=64$, $D_n=2D_{n-1}+11\cdot 2^{n-2}$. $D_n=2^{n-1}\cdot\left(5+(n-1)\frac{11}{2}\right)$.

Приклад 6.07.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & a & a & \cdots & x \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix};\ D_3=\begin{vmatrix} z_3 & a & x \\ a & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix};\ \begin{matrix} z_i\ne a,\ i=\overline{2,n}; \\ az_1\ne xy. \end{matrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} z_2 & x \\ y & z_1 \end{vmatrix} = z_1 z_2 - xy$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} z_3 & a & x \\ a & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_3 - a & 0 & 0 \\ a & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & x \\ a & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix} =$

$$= (z_3 - a) D_2 + \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & a & x \\ a & z_2 & x \\ ay & ay & az_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} II - I \to II \\ III - y \cdot I \to III \end{matrix} \right| =$$

$$= (z_3 - a) D_2 + \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & a & x \\ 0 & z_2 - a & 0 \\ 0 & 0 & az_1 - xy \end{vmatrix} = (z_3 - a) D_2 + (z_2 - a) \cdot (z_1 a - xy)$$

$$D_3 = (z_3 - a) \cdot (z_1 z_2 - xy) + (z_2 - a) \cdot (z_1 a - xy).$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n & a & a & \cdots & x \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n - a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & x \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(z_n-a)D_{n-1}+\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & x \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ay & ay & ay & \cdots & az_1 \end{vmatrix}=$$

$$=(z_n-a)D_{n-1}+(az_1-xy)\prod_{i=2}^{n-1}(z_i-a).$$

Таким чином, $D_n=(z_n-a)D_{n-1}+(az_1-xy)\prod_{i=2}^{n-1}(z_i-a)$.

Припустимо, що $D_n=U_n\prod_{i=2}^{n}(z_i-a)$, тоді $U_1=D_1=z_1$. Після підстановки рекурентне співвідношення зводиться до канонічного вигляду:

$$U_n\prod_{i=2}^{n}(z_i-a)=(z_n-a)U_{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}(z_i-a)+(az_1-xy)\prod_{i=2}^{n-1}(z_i-a)\quad\Bigg|\div\prod_{i=2}^{n}(z_i-a)$$

$$U_n=U_{n-1}+(az_1-xy)\frac{\prod_{i=2}^{n-1}(z_i-a)}{\prod_{i=2}^{n}(z_i-a)}=U_{n-1}+\frac{az_1-xy}{z_n-a}$$

Розв’яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} U_n=U_{n-1}+\dfrac{az_1-xy}{z_n-a}; \\ U_1=D_1=z_1 \end{cases}$$

$$U_2=U_1+\frac{az_1-xy}{z_2-a}=z_1+\frac{az_1-xy}{z_2-a},$$

$$U_3=U_2+\frac{az_1-xy}{z_3-a}=z_1+\frac{az_1-xy}{z_2-a}+\frac{az_1-xy}{z_3-a}=z_1+(az_1-xy)\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{z_m-a},$$

....,

$$U_n=z_1+(az_1-xy)\cdot\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{z_m-a}$$

Отже, задача повністю розв’язана:

$$D_n=\prod_{i=2}^{n}(z_i-a)\cdot\left(z_1+(az_1-xy)\cdot\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{z_m-a}\right)$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.07.01. $$D_n=\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & x \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & x \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=2-xy$, $D_3=5-3xy$, $D_n=(n-1)\cdot D_{n-1}+(1-xy)\cdot(n-2)!$, $D_n=\left(1+(1-xy)\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1}\right)\cdot(n-1)!$.
6.07.02. $$D_n=\begin{vmatrix} 2n+1 & 1 & 1 & \cdots & x \\ 1 & 2n-1 & 1 & \cdots & x \\ 1 & 1 & 2n-3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 7 & 1 & x \\ 1 & 5 & x \\ y & y & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=15-xy$, $D_3=102-10xy$, $D_n=2nD_{n-1}+2^{n-2}(3-xy)\cdot(n-1)!$, $D_n=2^{n-1}n!\cdot\left(3+\frac{3-xy}{2}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}\right)$.
6.07.03. $$D_n=\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=-4$, $D_3=-13$, $D_n=(n-1)D_{n-1}-5\cdot(n-2)!$, $n>1$, $D_n=\left(1-5\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1}\right)\cdot(n-1)!$.

6.07.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n & 2 & 2 & \cdots & 1 \\ 2 & 2n-2 & 2 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2n-4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 7$, $D_3 = 34$,

$D_n = 2\cdot(n-1)D_{n-1} + 3\cdot 2^{n-2}(n-2)!$, $n > 1$,

$D_n = \left(2 + \frac{3}{2}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1}\right)2^{n-1}(n-1)!$.

6.07.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n & 2n & \cdots & 2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 13$, $D_3 = 29$, $D_n = D_{n-1} + (6n-2)$,

$D_n = 3n^2 + n - 1$.

6.07.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n & n & \cdots & 3 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 3 \\ n-2 & n-2 & n-1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_n = D_{n-1} + (2n-3)$,

$D_n = n^2 - 2n + 3$.

6.07.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & n & n & \cdots & 3 \\ n-1 & 2n-3 & n-1 & \cdots & 3 \\ n-2 & n-2 & 2n-5 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = -3$, $D_3 = -9$,

$D_n = (n-1) \cdot D_{n-1} + (n-6) \cdot (n-2)\,!$, $D_n = \left(1 + \sum\limits_{m=2}^{n} \dfrac{m-6}{m-1}\right) \cdot (n-1)\,!$.

6.07.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 1 \\ 2n-3 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ 2n-5 & 2n-5 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = -6$,

$D_n = -(n-1) D_{n-1} + (-1)^{n-2}\, 2 \cdot (n-1)\,!$, $D_n = (-1)^{n-1} \left(1 - 2 \cdot (n-1)\right) \cdot (n-1)\,!$.

6.07.09.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n+1 & 3n & 3n & \cdots & 5 \\ 3n-3 & 3n-2 & 3n-3 & \cdots & 5 \\ 3n-6 & 3n-6 & 3n-5 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 13$, $D_3 = 34$, $D_n = -D_{n-1} + (12n - 15)$,

$D_n = 6n^2 - 9n + 7$.

Приклад 6.08.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} z_{n+1}+z_n & z_n & 0 & \cdots & 0 \\ z_n & z_n+z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1}+z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_2+z_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} z_4+z_3 & z_3 & 0 \\ z_3 & z_3+z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z_2 + z_1$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} z_3+z_2 & z_2 \\ z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_3 & 0 \\ z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_2 \\ z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} = z_3\left(z_2+z_1\right) + \begin{vmatrix} z_2 & z_2 \\ 0 & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} z_4+z_3 & z_3 & 0 \\ z_3 & z_3+z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_4 & 0 & 0 \\ z_3 & z_3+z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} z_3 & z_3 & 0 \\ z_3 & z_3+z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} = z_4 \cdot D_2 + \begin{vmatrix} z_3 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2+z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= z_4 \cdot D_2 + \begin{vmatrix} z_3 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_1 \end{vmatrix} = z_4 \cdot D_2 + z_3z_2z_1$$

$$D_3 = z_4z_3z_2 + z_4z_3z_1 + z_4z_2z_1 + z_3z_2z_1 .$$

Загальний випадок.
*n.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_{n+1}+z_n & z_n & 0 & \cdots & 0 \\ z_n & z_n+z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1}+z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_2+z_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{запишемо даний ви-}\\ \text{значник у вигляді}\\ \text{суми двох визначників}\end{array}\right|=\begin{vmatrix} z_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_n & z_n+z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1}+z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_2+z_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} z_n & z_n & 0 & \cdots & 0 \\ z_n & z_n+z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1}+z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_2+z_1 \end{vmatrix}.$$

Далі, для другого визначника: послідовно віднімемо із кожного рядка, починаючи з другого, наступний рядок. Отримаємо визначник верхнього виду.

$$D_n=z_{n+1}\cdot D_{n-1}+\begin{vmatrix} z_n & z_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=z_{n+1}\cdot D_{n-1}+\prod_{m=1}^{n} z_m.$$

Ми отримали неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку $D_n=z_{n+1}\cdot D_{n-1}+\prod_{m=1}^{n} z_m$, де $D_1=z_2+z_1$, $p(n)=z_{n+1}$, $q(n)=\prod_{m=1}^{n} a_m$.

Згідно з формулою $D_n=\prod_{m=2}^{n} p(m)\cdot\left(D_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{q(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)}\right)$ маємо

$$D_n=\prod_{m=2}^{n} z_{m+1}\cdot\left(z_2+z_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{\prod_{m=1}^{k} z_m}{\prod_{m=2}^{k} z_{m+1}}\right)=\prod_{m=2}^{n} z_{m+1}\cdot\left(z_1+z_2+z_1z_2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{z_{k+1}}\right),$$

$$D_n=\prod_{m=2}^{n} z_{m+1}\cdot\left(z_1+z_2+z_1z_2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{z_{k+1}}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

6.08.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=11$, $D_n=(n+1)\cdot D_{n-1}+n\,!$,

$D_n=\left(3+2\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m+1}\right)\cdot\frac{(n+1)!}{2}$.

6.08.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} 4n & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-1 & 4n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-3 & 4n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1=4$, $D_2=23$, $D_3=156$,

$D_n=(2n+1)\cdot D_{n-1}+(2n-1)\,!!$, $D_n=\left(4+3\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2m+1}\right)\cdot\frac{(2n+1)!!}{3}$.

6.08.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-1 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3n-2 & 6n-7 & 3n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & 3n-5 & 6n-13 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 17 & 7 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $D_2 = 39$, $D_3 = 418$,

$$D_n = (3n+1)\cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n}(3m-2),$$

$$D_n = \left(5 + 4\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{3m+1}\right)\cdot\frac{1}{4}\prod_{m=1}^{n}(3m+1).$$

6.08.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 8n+2 & 4n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 4n-1 & 8n-6 & 4n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & 4n-5 & 8n-14 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 10 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 26 & 11 & 0 \\ 11 & 18 & 7 \\ 0 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, $D_1 = 10$, $D_2 = 131$, $D_3 = 1896$,

$$D_n = (4n+3)\cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n}(4m-1),$$

$$D_n = \left(10 + 3\cdot 7\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{4m+3}\right)\cdot\frac{1}{7}\prod_{m=1}^{n}(4m+3).$$

6.08.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3\cdot 2^n - 2 & 2^n - 1 & \cdots & 0 \\ 2^n - 1 & 3\cdot 2^{n-1} - 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 22 & 7 & 0 \\ 7 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 31$, $D_3 = 486$,

$$D_n = \left(2^{n+1} - 1\right)\cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n}\left(2^m - 1\right),$$

$$D_n = \left(4 + 3\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2^{m+1} - 1}\right)\cdot\frac{1}{3}\prod_{m=1}^{n}\left(2^{m+1} - 1\right).$$

6.08.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & \cdots & 0 \\ (-1)^{n-1} n & (-1)^{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $D_1 = -1$, $D_2 = -5$, $D_3 = 14$,

$$D_n = (-1)^n (n+1)\cdot D_{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\cdot n!,$$

$$D_n = \left(-1 + 2\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m+1}\right)\cdot\frac{(-1)^{\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{2}}\cdot(n+1)!}{2}.$$

§ 7. Система двох рекурентних співвідношень

Розглянемо систему двох неоднорідних лінійних рекурентних співвідношень першого порядку:

$$\begin{cases} D_n = p_n D_{n-1} + q_n, \\ D_n = r_n D_{n-1} + s_n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Якщо $p_n \neq r_n$, то система (7.1) однозначно розв'язується відносно D_n.

$$D_n = \frac{q_n r_n - s_n p_n}{r_n - p_n} \ . \tag{7.2}$$

Розглянемо обчислення деяких визначників, для яких можна побудувати систему рекурентних співвідношень (7.1).

Приклад 7.1.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} x+y & x & x \\ y & x+y & x \\ y & y & x+y \end{vmatrix}, \ (x \neq y).$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для другого визначника вине-} \\ \text{семо спільний множник } x \\ \text{із першого рядка за знак ви-} \\ \text{значника} \end{array} \right| = y \cdot D_{n-1} +$$

$$+ x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{перший рядок помно-} \\ \text{жений на } y\text{, віднімемо} \\ \text{від кожного з решти} \\ \text{рядків} \end{array} \right| =$$

$$= y \cdot D_{n-1} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = y \cdot D_{n-1} + x \cdot x^{n-1}.$$

Отримаємо $D_n = yD_{n-1} + x^n$.

Якщо у вихідному визначнику поміняти місцями x та y, то отримаємо транспонований визначник. Операція транспонування не змінює значення визначника, тому $D_n = xD_{n-1} + y^n$. Таким чином, ми отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} D_n = yD_{n-1} + x^n, \\ D_n = xD_{n-1} + y^n. \end{cases}$ $(x-y)D_n = x^{n+1} - y^{n+1}$, $D_n = \dfrac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}, x \neq y$.

У випадку, коли $x = y$ розглянемо границю цього виразу при $y \to x$:

$$D_n = \lim_{y \to x} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{y \to x} \frac{-(n+1)y^n}{-1} = (n+1)x^n.$$

Крім того, цей визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.1.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 2^n, \\ D_n = 2D_{n-1} + 1. \end{cases}$, $D_n = 2^{n+1} - 1$.

7.1.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 8 & \cdots & 8 \\ 3 & 11 & 8 & \cdots & 8 \\ 3 & 3 & 11 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 11 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 8 \\ 3 & 11 & 8 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix}$, $D_1 = 11$, $\begin{cases} D_n = 3D_{n-1} + 8^n, \\ D_n = 8D_{n-1} + 3^n. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{8^{n+1} - 3^{n+1}}{5}$.

7.1.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 7 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 5 & 7 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$, $D_1 = 7$, $\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} + 5^n, \\ D_n = 5D_{n-1} + 2^n. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$.

7.1.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 8 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 7 & 8 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 7 & 7 & \cdots & 8 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, $D_1 = 8$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 7^n, \\ D_n = 7D_{n-1} + 1. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{7^{n+1} - 1}{6}$.

7.1.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 4 & 5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 4^n, \\ D_n = 4D_{n-1} + 1. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{3}$.

7.1.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ a+y & x+y & a+x & \cdots & a+x \\ a+y & a+y & x+y & \cdots & a+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+y & a+y & a+y & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} x+y & a+x & a+x \\ a+y & x+y & a+x \\ a+y & a+y & x+y \end{vmatrix}$, $D_1 = x + y$,

$$\begin{cases} D_n = (y-a) \cdot D_{n-1} + (a+x) \cdot (x-a)^{n-1}, \\ D_n = (x-a) \cdot D_{n-1} + (a+y) \cdot (y-a)^{n-1}. \end{cases},$$

$$D_n = \frac{(a+x) \cdot (x-a)^n - (a+y) \cdot (y-a)^n}{x-y}.$$

7.1.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} xy & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ a+y & xy & a+x & \cdots & a+x \\ a+y & a+y & xy & \cdots & a+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+y & a+y & a+y & \cdots & xy \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} xy & a+x & a+x \\ a+y & xy & a+x \\ a+y & a+y & xy \end{vmatrix}$, $D_1 = xy$,

$$\begin{cases} D_n = (xy-x-a)\cdot D_{n-1} + (a+x)\cdot(xy-y-a)^{n-1}, \\ D_n = (xy-y-a)\cdot D_{n-1} + (a+y)\cdot(xy-x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

7.1.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+y & x+y & a+x & \cdots & a+x \\ b+y & b+y & x+y & \cdots & a+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b+y & b+y & b+y & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} x+y & a+x & a+x \\ b+y & x+y & a+x \\ b+y & b+y & x+y \end{vmatrix}$, $D_1 = x+y$,

$$\begin{cases} D_n = (y-a)\cdot D_{n-1} + (a+x)\cdot(x-b)^{n-1}, \\ D_n = (x-b)\cdot D_{n-1} + (b+y)\cdot(y-a)^{n-1}. \end{cases},$$

$$D_n = \frac{(a+x)\cdot(x-b)^n - (b+y)\cdot(y-a)^n}{(a+x)-(b+y)}.$$

7.1.09.

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ax+b & ax+b & \cdots & ax+b \\ by+a & a+b & ax+b & \cdots & ax+b \\ by+a & by+a & a+b & \cdots & ax+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ by+a & by+a & by+a & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} a+b & ax+b & ax+b \\ by+a & a+b & ax+b \\ by+a & by+a & a+b \end{vmatrix}$, $D_1=a+b$,

$$\begin{cases} D_n=a(1-x)\cdot D_{n-1}+(ax+b)\cdot b^{n-1}\cdot(1-y)^{n-1}, \\ D_n=b(1-y)\cdot D_{n-1}+(by+a)\cdot a^{n-1}\cdot(1-x)^{n-1}. \end{cases},$$

$$D_n=\frac{(ax+b)\cdot b^n\cdot(1-y)^n-(by+a)\cdot a^n\cdot(1-x)^n}{(b+ax)-(a+by)}$$

7.1.10.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & \frac{x}{y} & \frac{x}{y} & \dots & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & z_{n-1} & \frac{x}{y} & \dots & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & z_{n-2} & \dots & \frac{x}{y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & \dots & z_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} z_3 & \frac{x}{y} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & z_2 & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & z_1 \end{vmatrix}$, $D_1=z_1$, $\begin{cases} D_n=\left(z_n-\frac{x}{y}\right)\cdot D_{n-1}+\frac{x}{y}\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(z_m-\frac{y}{x}\right), \\ D_n=\left(z_n-\frac{y}{x}\right)\cdot D_{n-1}+\frac{y}{x}\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(z_m-\frac{x}{y}\right) \end{cases},$

$$D_n=\frac{\frac{y}{x}\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(z_m-\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(z_m-\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}.$$

Приклад 7.2.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & y \\ b & a+b & y \\ x & x & z \end{vmatrix}, \ (a \neq b).$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ K - \dfrac{a}{b} \cdot I \to K, \quad K = \overline{2, n-1} \\ N - \dfrac{y}{b} \cdot I \to N \end{array} \right| =$$

$$= a \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & b-a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & b-a & b-a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b-a & b-a & b-a & \ldots & b & 0 \\ x & x-\dfrac{ax}{b} & x-\dfrac{ax}{b} & x-\dfrac{ax}{b} & \ldots & x-\dfrac{ax}{b} & z-\dfrac{yx}{b} \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot D_{n-1} + b^{n-2} \cdot (bz - xy).$$

$$D_n = a \cdot D_{n-1} + b^{n-2} \cdot (bz - xy).$$

Поміняємо місцями змінні a та b, x та y. Дістаємо друге співвідношення $D_n = b \cdot D_{n-1} + a^{n-2} \cdot (az - xy)$. Таким чином, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} D_n = a \cdot D_{n-1} + b^{n-2} \cdot (bz - xy), \\ D_n = b \cdot D_{n-1} + a^{n-2} \cdot (az - xy). \end{cases}$$

Виключивши невідому D_{n-1}, маємо:

$$(a-b)D_n = a^n \cdot (az - xy) - b^n \cdot (bz - xy),$$

$$D_n = \frac{a^n \cdot (az - xy) - b^n \cdot (bz - xy)}{a-b}.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.2.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ b & a+b & a & \cdots & a \\ b & b & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b & 2b & 2b & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ b & a+b & a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$, $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2 + b^2$, $D_3 = a^3 + b^3$,

$\begin{cases} D_n = b \cdot D_{n-1} + a^{n-1} \cdot (a-b), \\ D_n = a \cdot D_{n-1} + b^{n-1} \cdot (b-a). \end{cases}$ $D_n = a^n + b^n$,

7.2.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 5$, $D_3 = 9$,

$\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 2^{n-1}, \\ D_n = 2 \cdot D_{n-1} + 1. \end{cases}$. $D_n = 2^n + 1$.

7.2.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $D_2 = 21$, $D_3 = 87$, $\begin{cases} D_n = 3 \cdot D_{n-1} + 6 \cdot 4^{n-2}, \\ D_n = 4 \cdot D_{n-1} + 3^{n-2}. \end{cases}$.

$D_n = 6 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-1}$.

7.2.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 7 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 7 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, $D_1 = 7$, $D_2 = 45$, $D_3 = 285$, $\begin{cases} D_n = 5 \cdot D_{n-1} + 10 \cdot 6^{n-2}, \\ D_n = 6 \cdot D_{n-1} + 3 \cdot 5^{n-2}. \end{cases}$.

$D_n = 10 \cdot 6^{n-1} - 3 \cdot 5^{n-1}$.

7.2.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = -5$, $D_3 = 2$, $\begin{cases} D_n = -D_{n-1} - 3, \\ D_n = D_{n-1} + 7 \cdot (-1)^{n-1}. \end{cases}$.

$$D_n = \frac{7 \cdot (-1)^{n-2} - 3}{2}.$$

7.2.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 6$, $D_3 = 24$, $\begin{cases} D_n = -D_{n-1} + 10 \cdot 3^{n-2}, \\ D_n = 3 \cdot D_{n-1} + 6 \cdot (-1)^{n-1}. \end{cases}$.

$$D_n = \frac{10 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot (-1)^{n-1}}{4}.$$

Приклад 7.3.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & x & \cdots & x \\ y & z & x & \cdots & x \\ y & y & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix}, \ (x \neq y).$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & x & \cdots & x \\ y & z & x & \cdots & x \\ y & y & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & x & \cdots & x \\ y & y & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ y & z & x & \cdots & x \\ y & y & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{перший рядок помно-} \\ \text{жений на } \dfrac{x}{y}\text{, відні-} \\ \text{мемо від кожного з} \\ \text{решти рядків} \end{array} \right| = (z-x)\cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} x & x & x & \ldots & x \\ 0 & z-y & x-y & \ldots & x-y \\ 0 & 0 & z-y & \ldots & x-y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z-y \end{vmatrix} =$$

$$= (z-x)\cdot D_{n-1} + x(z-y)^{n-1}.$$

$$D_n = (z-x)\cdot D_{n-1} + x(z-y)^{n-1}.$$

Якщо у вихідному визначнику поміняти місцями x та y, то отримаємо транспонований визначник. Операція транспонування не змінює значення визначника, тому $D_n = (z-y)\cdot D_{n-1} + y(z-x)^{n-1}$. Таким чином, ми отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} D_n = (z-x)\cdot D_{n-1} + x(z-y)^{n-1}, \\ D_n = (z-y)\cdot D_{n-1} + y(z-x)^{n-1}. \end{cases}$$

$$(x-y)D_n = x(z-y)^n - y(z-x)^n, \quad D_n = \frac{x(z-y)^n - y(z-x)^n}{x-y}.$$

У випадку, коли $x = y$ розглянемо границю цього виразу при $y \to x$:

$$D_n = \lim_{y\to x} \frac{x(z-y)^n - y(z-x)^n}{x-y} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{y\to x} \frac{x\cdot n\cdot (z-y)^{n-1}\cdot(-1) - (z-x)^n}{-1} =$$

$$= x\cdot n\cdot (z-x)^{n-1} + (z-x)^n = ((n-1)x+z)\cdot(z-x)^{n-1}.$$

Крім того, цей визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.3.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = 3D_{n-1} + 2\cdot 4^{n-1}, \\ D_n = 4D_{n-1} + 1\cdot 3^{n-1}. \end{cases}$, $D_n = 2\cdot 4^n - 3^n$.
7.3.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 8 & \cdots & 8 \\ 3 & 9 & 8 & \cdots & 8 \\ 3 & 3 & 91 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 9 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 3 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$, $D_1 = 11$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 8\cdot 6^{n-1}, \\ D_n = 6D_{n-1} + 3. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{8\cdot 6^n - 3}{5}$.
7.3.03. $$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 9 & 2 & \cdots & 2 \\ 5 & 5 & 9 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 9 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \\ 5 & 5 & 9 \end{vmatrix}$, $D_1 = 9$, $\begin{cases} D_n = 4D_{n-1} + 5\cdot 7^{n-1}, \\ D_n = 7D_{n-1} + 2\cdot 4^{n-1}. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{5\cdot 7^n - 2\cdot 4^n}{3}$.

7.3.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 4 & 5 & 3 & \cdots & 3 \\ 4 & 4 & 5 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 4 \cdot 2^{n-1}, \\ D_n = 2D_{n-1} + 3. \end{cases}$, $D_n = 4 \cdot 2^n - 3$.

7.3.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 7 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 7 & 7 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 5^{n-1}, \\ D_n = -5D_{n-1} + 7. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{7 - (-5)^n}{6}$.

7.3.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 7 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 7 & 7 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 7 & 7 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = 3D_{n-1} + 2 \cdot (-2)^{n-1}, \\ D_n = -2D_{n-1} + 7 \cdot 3^{n-1}. \end{cases}$,

$$D_n = \frac{7 \cdot 3^n - (-1)^n 2^{n+1}}{5}.$$

7.3.07. $$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\3&2&1&\cdots&1\\3&3&2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\3&3&3&\cdots&2\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&1\\3&3&2\end{vmatrix}$, $D_1=2$, $\begin{cases}D_n=D_{n-1}-(-1)^n,\\D_n=-D_{n-1}+3.\end{cases}$, $D_n=\dfrac{3-\left(-1\right)^n}{2}$.
7.3.08. $$D_n=\begin{vmatrix}0&3&3&\cdots&3\\1&0&3&\cdots&3\\1&1&0&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}0&3&3\\1&0&3\\1&1&0\end{vmatrix}$, $D_1=0$, $\begin{cases}D_n=-3D_{n-1}+(-1)^{n-1}3,\\D_n=-D_{n-1}+(-1)^{n-1}3^{n-1}.\end{cases}$, $D_n=(-1)^{n-1}\dfrac{3^n-3}{2}$..

Приклад 7.4.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n=\begin{vmatrix}z_n&x&x&\cdots&x\\y&z_{n-1}&x&\cdots&x\\y&y&z_{n-2}&\cdots&x\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\y&y&y&\cdots&z_1\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}z_3&x&x\\y&z_2&x\\y&y&z_1\end{vmatrix},\ \left(x\neq y\right).$$

Розв'язання

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & x & x & \cdots & x \\ y & z_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{запишемо даний}\\ \text{визначник у вигляді}\\ \text{суми двох визначни-}\\ \text{ків}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} z_n-x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & z_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ y & z_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{для другого визначни-}\\ \text{ка: перший рядок по-}\\ \text{множений на } \frac{y}{x}\text{,}\\ \text{віднімемо від кожного}\\ \text{з решти рядків}\end{array}\right|=(z-x)\cdot D_{n-1}+$$

$$+\begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & z_{n-1}-y & x-y & \dots & x-y \\ 0 & 0 & z_{n-2}-y & \dots & x-y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_1-y \end{vmatrix}=(z_n-x)\cdot D_{n-1}+x\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m-y).$$

$$D_n=(z_n-x)\cdot D_{n-1}+x\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m-y).$$

Якщо у вихідному визначнику поміняти місцями x та y, то отримаємо транспонований визначник. Операція транспонування не змінює значення визначника, тому $D_n=(z_n-y)\cdot D_{n-1}+y\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m-x)$. Таким чином,

$$\begin{cases} D_n = (z_n - x)\cdot D_{n-1} + x\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m - y); \\ D_n = (z_n - y)\cdot D_{n-1} + y\cdot\prod_{m=1}^{n-1}(z_m - x) \end{cases} \Rightarrow \quad D_n = \frac{x\cdot\prod_{m=1}^{n}(z_m - y) - y\cdot\prod_{m=1}^{n}(z_m - x)}{x - y}.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.4.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & n+3 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 3 & n+2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = (n+1)D_{n-1} + \frac{1}{2}(n+2)!, \\ D_n = (n+3)D_{n-1} + n!. \end{cases}$,

$D_n = \frac{(n+1)!}{4}(n+1)(n+4)$.

7.4.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $\begin{cases} D_n = (n+1)\cdot D_{n-1} + (n-1)!, \\ D_n = n\cdot D_{n-1} + 2\cdot n!. \end{cases}$,

$D_n = (2n+1)\cdot n!$

7.4.03. $$D_n=\begin{vmatrix} n+3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & n+2 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 2 & n+1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1=4$, $\begin{cases} D_n=n\cdot D_{n-1}+3\cdot n!, \\ D_n=(n+1)\cdot D_{n-1}+2\cdot(n-1)!. \end{cases}$, $D_n=(3n+1)\cdot n\,!$
7.4.04. $$D_n=\begin{vmatrix} n+x & x & \cdots & x \\ x-1 & n-1+x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-1 & x-1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3+x & x & x \\ x-1 & 2+x & x \\ x-1 & x-1 & 1+x \end{vmatrix}$, $D_1=1+x$, $\begin{cases} D_n=n\cdot D_{n-1}+x\cdot n!, \\ D_n=(n+1)\cdot D_{n-1}+(x-1)\cdot(n-1)!. \end{cases}$, $D_n=(nx+1)\cdot n\,!$
7.4.05. $$D_n=\begin{vmatrix} 2n+x & x & \cdots & x \\ x-1 & 2n-2+x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-1 & x-1 & \cdots & 2+x \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 6+x & x & x \\ x-1 & 4+x & x \\ x-1 & x-1 & 2+x \end{vmatrix}$, $D_1=2+x$, $\begin{cases} D_n=2n\cdot D_{n-1}+x\cdot(2n-1)!!, \\ D_n=(2n+1)\cdot D_{n-1}+(x-1)\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!. \end{cases}$, $D_n=x(2n+1)\,!!-(x-1)\cdot 2^n\cdot n\,!$

7.4.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+7 & 7 & \cdots & 7 \\ 5 & 2n+5 & \cdots & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & \cdots & 9 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 11 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 9. \\ D_2 = 64. \end{matrix}$,

$\begin{cases} D_n = 2n \cdot D_{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} \cdot n!, \\ D_n = (2n+2) \cdot D_{n-1} + 5 \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!. \end{cases}$, $D_n = 2^{n-1} \cdot \left(7 \cdot (n+1)! - 5 \cdot n!\right)$.

Приклад 7.5.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 \\ y & x+y & x \\ 0 & y & x+y \end{vmatrix},$$

$(x \neq y)$.

Розв'язання

Запишемо даний визначник у вигляді суми двох визначників:

$$D_n = \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix} = yD_n + \Delta_n .$$

Обчислимо другий визначник окремо.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\ II-y\cdot I\to II\ \right|=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}=x\cdot\Delta_{n-1}.$$

Отже, $\Delta_n=x\cdot\Delta_{n-1}$. Взявши до уваги початкову умову $\Delta_1=x$, отримаємо $\Delta_n=x^n$.

Остаточно маємо: $D_n=yD_{n-1}+x^n$.

Якщо у вихідному визначнику поміняти місцями x та y, то отримаємо транспонований визначник. Операція транспонування не змінює значення визначника, тому $D_n=xD_{n-1}+y^n$. Таким чином,

$$\begin{cases} D_n=yD_{n-1}+x^n, \\ D_n=xD_{n-1}+y^n \end{cases} \Rightarrow \quad D_n=\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}.$$

У випадку, коли $x=y$ розглянемо границю цього виразу при $y\to x$:

$$D_n=\lim_{y\to x}\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{y\to x}\frac{-(n+1)y^n}{-1}=(n+1)x^n.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.5.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3$, $\begin{cases} D_n=D_{n-1}+2^n, \\ D_n=2D_{n-1}+1. \end{cases}$, $D_n=2^{n+1}-1$.

7.5.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 11 & 8 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 11 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 3 & 11 & 8 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix}$, $D_1 = 11$, $\begin{cases} D_n = 3D_{n-1} + 8^n, \\ D_n = 8D_{n-1} + 3^n. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{8^{n+1} - 3^{n+1}}{5}$.

7.5.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 5 & 9 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 9 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$, $D_1 = 9$, $\begin{cases} D_n = 4D_{n-1} + 5^n, \\ D_n = 5D_{n-1} + 4^n. \end{cases}$, $D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$.

7.5.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 4^n, \\ D_n = 4D_{n-1} + 1. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{3}$.

7.5.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 7 & 9 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 7 & 9 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$, $D_1 = 9$, $\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} + 7^n, \\ D_n = 7D_{n-1} + 2^n. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{7^{n+1} - 2^{n+1}}{5}$.

Приклад 7.6.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень .

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} z_3 & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix}, \ (x \neq y).$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} z_2 & a_1x \\ a_2y & z_1 \end{vmatrix} = z_1z_2 - a_1a_2xy$.

$$*3.\ D_3 = \begin{vmatrix} z_3 & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_3 - a_3x & 0 & 0 \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3x & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (z_3 - a_3x) \cdot D_2 + x \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} II - y \cdot I \to II \\ III - y \cdot I \to III \end{vmatrix} = (z_3 - a_3x) \cdot D_2 +$$

$$+ x \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & z_2 - a_2y & a_1(x - y) \\ 0 & 0 & z_1 - a_1y \end{vmatrix} = (z_3 - a_3x) \cdot D_2 + a_3x \cdot \prod_{m=1}^{2} (z_m - a_my).$$

$$D_3 = (z_3 - a_3x) \cdot D_2 + a_3x \cdot \prod_{m=1}^{2} (z_m - a_my).$$

З іншого боку.

$$D_3 = \begin{vmatrix} z_3 & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_3 - a_3y & a_2x & a_1x \\ 0 & z_2 & a_1x \\ 0 & a_2y & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3y & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(z_3-a_3y\right)\cdot D_2+a_3y\cdot\begin{vmatrix}1 & a_2x & a_1x\\ 1 & z_2 & a_1x\\ 1 & a_2y & z_1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{елементарні перетворення}\\ \text{зі стовпцями:}\\ II-a_2x\cdot I\to II\\ III-a_1x\cdot I\to III\end{array}\right|=$$

$$=\left(z_3-a_3y\right)\cdot D_2+a_3y\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & z_2-a_2x & 0\\ 1 & a_2\left(y-x\right) & z_1-a_1x\end{vmatrix}=$$

$$=\left(z_3-a_3y\right)\cdot D_2+a_3y\cdot\prod_{m=1}^{z}\left(z_m-a_mx\right).$$

$$D_3=\left(z_3-a_3y\right)\cdot D_2+a_3y\cdot\prod_{m=1}^{2}\left(z_m-a_mx\right).$$

Таким чином, ми отримали систему двох рекурентних співвідношень:
$$\begin{cases}D_3=\left(z_3-a_3x\right)\cdot D_2+a_3x\cdot\prod\limits_{m=1}^{2}\left(z_m-a_my\right);\\ D_3=\left(z_3-a_3y\right)\cdot D_2+a_3y\cdot\prod\limits_{m=1}^{2}\left(z_m-a_mx\right).\end{cases}.$$

$$a_3\cdot(x-y)D_3=a_3x\cdot\prod_{m=1}^{3}\left(z_m-a_my\right)-a_3y\cdot\prod_{m=1}^{3}\left(z_m-a_mx\right),$$

$$D_3=\frac{x\cdot\prod\limits_{m=1}^{3}\left(z_m-a_my\right)-y\cdot\prod\limits_{m=1}^{3}\left(z_m-a_mx\right)}{x-y}.$$

Загальний випадок.

*n. $D_n=\left(z_n-a_ny\right)\cdot D_{n-1}+a_ny\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(z_m-a_mx\right)$

$$+x\cdot\begin{vmatrix}a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1\\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x\\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{перший рядок помно-}\\ \text{жений на } y\text{, віднімемо}\\ \text{від кожного з решти}\\ \text{рядків}\end{array}\right|=$$

$$(z_n - a_n x)\cdot D_{n-1} + x\cdot \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & z_{n-1} - a_{n-1}y & a_{n-2}(x-y) & \cdots & a_1(x-y) \\ 0 & 0 & z_{n-2} - a_{n-2}y & \cdots & a_1(x-y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 - a_1 y \end{vmatrix} =$$

$$= (z_n - a_n x)\cdot D_{n-1} + a_n x \cdot \prod_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m y).$$

$$D_n = (z_n - a_n x)\cdot D_{n-1} + a_n x \cdot \prod_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m y).$$

З іншого боку.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ a_n y & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ a_n y & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1 x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n y & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n - a_n y & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ 0 & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ 0 & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1 x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+a_n y \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ 1 & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1 x \\ 1 & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1 x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ \mathrm{II} - a_{n-1}x\cdot I \to II \\ III - a_{n-2}x \cdot I \to III \\ \cdots\cdots \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N - a_1 x \cdot I \to N \end{array} \right| =$$

$$= (z_n - a_n y)\cdot D_{n-1} + a_n y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_{n-1} - a_{n-1}x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1}(y-x) & z_{n-2} - a_{n-2}x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1}(y-x) & a_{n-2}(y-x) & \cdots & z_1 - a_1 x \end{vmatrix} =$$

$$= (z_n - a_n y)\cdot D_{n-1} + a_n y \cdot \prod_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m x).$$

$$D_n = (z_n - a_n y)\cdot D_{n-1} + a_n y \cdot \prod_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m x).$$

Таким чином, ми отримали систему двох рекурентних співвідношень: $\begin{cases} D_n = (z_n - a_n x)\cdot D_{n-1} + a_n x \cdot \prod\limits_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m y), \\ D_n = (z_n - a_n y)\cdot D_{n-1} + a_n y \cdot \prod\limits_{m=1}^{n-1}(z_m - a_m x). \end{cases}$

$$a_n \cdot (x-y) D_n = a_n x \cdot \prod_{m=1}^{n}(z_m - a_m y) - a_n y \cdot \prod_{m=1}^{n}(z_m - a_m x),$$

$$D_n = \frac{x \cdot \prod\limits_{m=1}^{n}(z_m - a_m y) - y \cdot \prod\limits_{m=1}^{n}(z_m - a_m x)}{x-y}.$$

У випадку, коли $z_1 = a_1 x$ або $z_1 = a_1 y$, визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.6.01.	$x=2,\quad y=1,\quad z_n = 2n+1,\quad a_n = n,$ $D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & 2n-1 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & 2n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 3, \\ D_2 = 11, \\ D_3 = 47. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 2n \cdot n\,!, \\ D_n = (n+1)\cdot D_{n-1} + n. \end{cases}$, $D_n = 2\cdot(n+1)\,!-1.$
7.6.02.	$x=2,\quad y=1,\quad z_n = 2n-1,\quad a_n = n,$ $D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & 2n-5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n = (-1)\cdot D_{n-1}, \\ D_n = (n-1)\cdot D_{n-1} + n\cdot(-1)^{n-1}. \end{cases}$, $D_n = (-1)^{n+1}.$

7.6.03.

$$x=2,\quad y=1,\quad z_n=n+1,\quad a_n=n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n-1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=2, \\ D_2=2, \\ D_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=-(n-1)\cdot D_{n-1}+2n, \\ D_n=D_{n-1}. \end{cases}$, $D_n=2$.

7.6.04.

$$x=2,\quad y=1,\quad z_n=n-2,\quad a_n=n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} n-2 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-3 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n-4 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=-1, \\ D_2=-4, \\ D_3=44. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=-(n+2)\cdot D_{n-1}+2n\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}, \\ D_n=-2\cdot D_{n-1}+n\cdot(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n+1)\,!}{2}. \end{cases}$,

$D_n=(-1)^n\cdot\left(2^{n+1}-\dfrac{(n+2)\,!}{2}\right)$.

7.6.05.

$$x=2,\quad y=1,\quad z_n=4n-3,\quad a_n=n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 4n-3 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & 4n-7 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & 4n-11 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=1, \\ D_2=1, \\ D_3=3. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=(2n-3)\cdot D_{n-1}, \\ D_n=3\cdot(n-1)\cdot D_{n-1}+n\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}(2n-3). \end{cases}$,

$D_n=-\prod\limits_{m=1}^{n}(2m-3)$.

7.6.06.

$$x=1,\quad y=2,\quad z_n=x_n+a,\quad a_n=x_n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x_n+a & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 2x_n & x_{n-1}+a & x_{n-2} & \cdots & x_1 \\ 2x_n & 2x_{n-1} & x_{n-2}+a & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2x_n & 2x_{n-1} & 2x_{n-2} & \cdots & x_1+a \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3=\begin{vmatrix} x_3+a & x_2 & x_1 \\ 2x_3 & x_2+a & x_1 \\ 2x_3 & 2x_2 & x_1+a \end{vmatrix},\quad \begin{cases} D_1=x_1+a, \\ D_2=2a^2-\prod\limits_{m=1}^{2}(a-x_m), \\ D_3=2a^3-\prod\limits_{m=1}^{3}(a-x_m). \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_n=a\cdot D_{n-1}+x_n\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}(a-x_m), \\ D_n=(a-x_n)\cdot D_{n-1}+2x_n.a^{n-1} \end{cases},\quad D_n=2a^n-\prod_{m=1}^{n}(a-x_m).$$

Приклад 7.7.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n=\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_nx & a_{n-2}b_nx & \cdots & a_1b_nx \\ a_nb_{n-1}y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1b_{n-1}x \\ a_nb_{n-2}y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1y & a_{n-1}b_1y & a_{n-2}b_1y & \cdots & c_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} c_3 & a_2b_3x & a_1b_3x \\ a_3b_2y & c_2 & a_1b_2x \\ a_3b_1y & a_2b_1y & z_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n x & a_{n-2}b_n x & \cdots & a_1 b_n x \\ a_n b_{n-1} y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1 b_{n-1} x \\ a_n b_{n-2} y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1 b_{n-2} x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 y & a_{n-1} b_1 y & a_{n-2} b_1 y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n - a_n b_n x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n b_{n-1} y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1 b_{n-1} x \\ a_n b_{n-2} y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1 b_{n-2} x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 y & a_{n-1} b_1 y & a_{n-2} b_1 y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_n b_n x & a_{n-1}b_n x & a_{n-2}b_n x & \cdots & a_1 b_n x \\ a_n b_{n-1} y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1 b_{n-1} x \\ a_n b_{n-2} y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1 b_{n-2} x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 y & a_{n-1} b_1 y & a_{n-2} b_1 y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для другого визначника: ви-} \\ \text{несемо спільний множник } a_n \\ \text{із першого стовпця за знак} \\ \text{визначника} \end{array} \right| = \left(c_n - a_n b_n x\right) \cdot D_{n-1} +$$

$$+ a_n \cdot \begin{vmatrix} b_n x & a_{n-1}b_n x & a_{n-2}b_n x & \cdots & a_1 b_n x \\ b_{n-1} y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1 b_{n-1} x \\ b_{n-2} y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1 b_{n-2} x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 y & a_{n-1} b_1 y & a_{n-2} b_1 y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$\left(c_n - a_n b_n x\right) \cdot D_{n-1} + a_n b_n x \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(c_m - a_m b_m y\right).$$

З іншого боку

$$D_n=\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_nx & a_{n-2}b_nx & \cdots & a_1b_nx \\ a_nb_{n-1}y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1b_{n-1}x \\ a_nb_{n-2}y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1y & a_{n-1}b_1y & a_{n-2}b_1y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} c_n-a_nb_ny & a_{n-1}b_nx & a_{n-2}b_nx & \cdots & a_1b_nx \\ 0 & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1b_{n-1}x \\ 0 & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1}b_1y & a_{n-2}b_1y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_nb_ny & a_{n-1}b_nx & a_{n-2}b_nx & \cdots & a_1b_nx \\ a_nb_{n-1}y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1b_{n-1}x \\ a_nb_{n-2}y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1y & a_{n-1}b_1y & a_{n-2}b_1y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(c_n-a_nb_ny\right)\cdot D_{n-1}+a_nb_ny\cdot\prod_{m=1}^{n-1}\left(c_m-a_mb_mx\right).$$

Таким чином, ми отримали систему двох рекурентних співвідношень: $\begin{cases} D_n=\left(c_n-a_nb_nx\right)\cdot D_{n-1}+a_nb_nx\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(c_m-a_mb_my\right), \\ D_n=\left(c_n-a_nb_ny\right)\cdot D_{n-1}+a_nb_ny\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(c_m-a_mb_mx\right). \end{cases}$.

Розв'язуємо систему рекурентних співвідношень відносно D_n:

$$a_nb_n\cdot(x-y)D_n=a_nb_nx\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(c_m-a_mb_my\right)-a_nb_ny\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(c_m-a_mb_mx\right),$$

$$D_n=\frac{x\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}\left(c_m-a_mb_my\right)-y\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}\left(c_m-a_mb_mx\right)}{x-y}.$$

У випадку, коли $z_1=a_1b_1x$ або $z_1=a_1b_1y$, визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

7.7.01.

$$x=2,\quad y=1,\quad a_n=n,\quad b_n=\frac{1}{n},\quad c_n=n+1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & 2\frac{n-1}{n} & 2\frac{n-2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{n}{n-1} & n & 2\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{2}{n-1} \\ \frac{n}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & n-1 & \cdots & \frac{2}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=2, \\ D_2=4, \\ D_3=12. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=(n-1)\cdot D_{n-1}+2\cdot(n-1)!, \\ D_n=n\cdot D_{n-1}. \end{cases}$,

$D_n=2\cdot n!$.

7.7.02.

$$x=2,\quad y=1,\quad a_n=n,\quad b_n=\frac{1}{n},\quad c_n=2n+3,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n+3 & 2\frac{n-1}{n} & 2\frac{n-2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{n}{n-1} & 2n+1 & 2\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{2}{n-1} \\ \frac{n}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & 2n-1 & \cdots & \frac{2}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 9 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=5, \\ D_2=33, \\ D_3=284. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=(2n+1)\cdot D_{n-1}+2^n\cdot n!, \\ D_n=2(n+1)\cdot D_{n-1}+(2n-1)!!. \end{cases}$,

$D_n=2^{n+1}\cdot(n+1)!-(2n+1)!!$.

7.7.03.

$$x=2,\ \ y=1,\ \ a_n=2n-1,\ \ b_n=\frac{1}{a_n},\ \ c_n=2n+3,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n+3 & \frac{4n-6}{2n-1} & \frac{4n-10}{2n-1} & \cdots & \frac{2}{2n-1} \\ \frac{2n-1}{2n-3} & 2n+1 & \frac{4n-10}{2n-3} & \cdots & \frac{2}{2n-3} \\ \frac{2n=1}{2n-5} & \frac{2n-3}{2n-5} & 2n-1 & \cdots & \frac{2}{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 9 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{3} & 7 & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{1} & \frac{3}{1} & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=5, \\ D_2=33, \\ D_3=284. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=(2n+1)\cdot D_{n-1}+2^n\cdot n\,!, \\ D_n=2(n+1)\cdot D_{n-1}+(2n-1)\,!!. \end{cases}$,

$D_n=2^{n+1}\cdot(n+1)\,!-(2n+1)\,!!$.

7.7.04.

$$b_n=\frac{1}{a_n},\ \ c_n=x+y,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & x+y & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & x+y & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} x+y & \frac{a_2}{a_3}x & \frac{a_1}{a_3}x \\ \frac{a_3}{a_2}y & x+y & \frac{a_1}{a_2}x \\ \frac{a_3}{a_1}y & \frac{a_2}{a_1}y & x+y \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_n=y\cdot D_{n-1}+x^n, \\ D_n=x\cdot D_{n-1}+y^n. \end{cases}$, $D_n=\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$.

7.7.05.

$$x=2,\ \ y=1,\ \ a_n=n,\ \ b_n=n,\ \ c_n=2n^2+1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n^2+1 & 2n^2-2n & \cdots & 2n \\ n^2-n & 2n^2-4n+3 & \cdots & 2n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 19 & 12 & 6 \\ 6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=3, \\ D_2=19, \\ D_3=199. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=D_{n-1}+2n^2\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(m^2+1\right), \\ D_n=\left(n^2+1\right)\cdot D_{n-1}+n^2 \end{cases}$,

$$D_n=2\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(m^2+1\right)-1\ .$$

7.7.06.

$$x=3,\ \ y=1,\ \ a_n=n,\ \ b_n=n,\ \ c_n=3n^2-1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3n^2-1 & 3n^2-3n & \cdots & 3n \\ n^2-n & 3n^2-6n+2 & \cdots & 3n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$D_3=\begin{vmatrix} 26 & 18 & 9 \\ 6 & 11 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{cases} D_1=2, \\ D_2=10, \\ D_3=179. \end{cases}$ $\begin{cases} D_n=-D_{n-1}+3n^2\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(2m^2-1\right), \\ D_n=\left(2n^2-1\right)\cdot D_{n-1}+\left(-1\right)^{n-1}n^2 \end{cases}$,

$$D_n=\frac{3\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}\left(2m^2-1\right)-\left(-1\right)^n}{2}\ .$$

§ 8. Перегляд розглянутих прикладів

Метод зведення до трикутного вигляду

Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду:

2.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (n-1)!$.

2.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & xy & xy & \cdots & x \\ xy & 1 & xy & \cdots & x \\ xy & xy & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & xy & x \\ xy & 1 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix}, \ xy \neq 1.$$

\# $D_n = (1-xy)^{n-1}$.

2.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & xy & xy & \cdots & x \\ xy & a_{n-1} & xy & \cdots & x \\ xy & xy & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & xy & x \\ xy & a_2 & x \\ y & y & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \prod\limits_{m=2}^{n} (a_m - xy)$.

2.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$.

2.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}.$$

$D_n = (na+b) \cdot b^{n-1}$.

2.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1}+b & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2}+b & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2+b & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1+b \end{vmatrix}.$$

$D_n = \left(b + \sum_{m=1}^{n} a_m \right) \cdot b^{n-1}$.

Варіанти a_n та b_n використовують для побудови визначника.

2.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m$.

2.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m$.

2.09.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} (a_m - b_m)$.

2.10.

$$D_n = \begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = b_n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (b_m - a_m)$.

2.11.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ an-a & a+b & a & \cdots & a \\ 0 & an-2a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ 2a & a+b & a \\ 0 & a & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (na+b) \cdot b^{n-1}$.

2.12.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & d \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ c & c & d \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = a^{n-1} \left(d - \frac{bc}{a}(n-1) \right)$.

Теорема про множення визначників

Обчислити визначник, використовуючи теорему про множення визначників.

3.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1b^{n-1} & c_1b^{n-2} & c_1b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & a_2 & 0 \\ c_2b & c_2 & a_1 \\ c_1b^2 & c_1b & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = c_1\prod_{m=2}^{n}\left(c_m - a_{m-1}b\right)$

3.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n + x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1}y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{n-1}z_{n-1} & x_{n-1} + x_{n-2}y_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2}y_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-2}z_{n-2} & x_{n-2} + x_{n-3}y_{n-3}z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}$$

\# $D_n = \prod_{m=1}^{n} x_m$

3.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{n} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-1} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \sum_{m=1}^{n-2} x_m & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_3 + x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_1 \end{vmatrix}$$

\# $D_n = \prod_{m=1}^{n} x_m$

3.05

$$D_n = \begin{vmatrix} x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} & \cdots & x_n + x_{n-1} \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} + x_{n-2} & \cdots & x_n + x_{n-1} + x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n + x_{n-1} & x_n + x_{n-1} + x_{n-21} & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} x_m \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} x_3 + x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_2 + x_1 & x_2 + x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$\# D_n = \prod_{m=1}^{n} x_m$$

3.06

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}b & c_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ c_{n-2}b^2 & c_{n-2}b & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 b^{n-1} & c_1 b^{n-2} & c_1 b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b & \cdots & 0 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$$

Метод рекурентних співвідношень

Довести тотожність.

4.01.

$$\begin{vmatrix} a_n + b & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b & b & a_{n-2} + b & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix} a_n+b & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1}+b & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2}+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b \end{vmatrix}.
$$

$$
\# \quad \begin{cases} D_n = a_n \cdot D_{n-1} + b^n, \\ D_1 = a_1 + b. \end{cases}
$$

4.02.

$$
\begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & z_{n-1} & a_{n-2}y & \cdots & a_1y \\ a_nx & a_{n-1}x & z_{n-2} & \cdots & a_1y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nx & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & z_1 \end{vmatrix}.
$$

$$
\# \quad \begin{cases} D_n = (z_n - a_nx)\cdot D_{n-1} + a_nx \cdot \prod_{m=1}^{n-1}(z_m - a_mx); \\ D_1 = z_1. \end{cases}
$$

4.03.

$$
\begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & \frac{a_n}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_n}{a_1}x \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_1}x \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}y & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_1}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1}{a_n}y & \frac{a_1}{a_{n-1}}y & \frac{a_1}{a_{n-2}}y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & \frac{a_n}{a_{n-1}}x & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{n-1}}{a_n}y & x+y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}
$$

$$
\# \quad \begin{cases} D_n = x \cdot D_{n-1} + y^n, \\ D_1 = x + y. \end{cases}.
$$

4.04.

$$\begin{vmatrix} x_n+y_n & \dfrac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_n x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \dfrac{a_n x_1}{a_1} \\ \dfrac{a_{n-1}y_n}{a_n} & x_{n-1}+y_{n-1} & \dfrac{a_{n-1}x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & \dfrac{a_{n-1}x_1}{a_1} \\ \dfrac{a_{n-2}y_n}{a_n} & \dfrac{a_{n-2}y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & \dfrac{a_{n-2}x_1}{a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_1 y_n}{a_n} & \dfrac{a_1 y_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_1 y_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & x_1+y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_n+y_n & \dfrac{a_n x_{n-1}}{a_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_{n-1}y_n}{a_n} & x_{n-1}+y_{n-1} & \dfrac{a_{n-1}x_{n-2}}{a_{n-2}} & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{n-2}y_{n-1}}{a_{n-1}} & x_{n-2}+y_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1+y_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\begin{cases} D_n = x_n \cdot D_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} y_m, \\ D_1 = x_1 + y_1 \end{cases}.$

4.05.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ c & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ a & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ c & a & 1 & \cdots & b^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\begin{cases} D_n = (1-ab)\cdot D_{n-1}, \\ D_1 = 1 \end{cases}.$

Однорідні рекурентні співвідношення першого порядку

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

5.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (a_n - a_{n-1}) D_{n-1}$, $\quad D_1 = a_1$. $\quad D_n = a_1 \prod_{i=2}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right)$.

5.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n + z_{n-1} & z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & z_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-2} & z_{n-2} + z_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} z_3 + z_2 & z_2 & 0 \\ z_2 & z_2 + z_1 & z_1 \\ 0 & z_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = z_n \cdot D_{n-1}$. $D_1 = z_1$, $\quad D_n = \prod_{m=1}^{n} z_m$.

5.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b & 1 & a \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}, \ (ab \neq 1).$$

\# $D_n = (1 - ab) D_{n-1}$, $\quad D_1 = 1$. $\quad D_n = \left(1 - ab\right)^{n-1}$.

5.04.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & z_{n-1}\cdot a & z_{n-2}\cdot a^2 & \cdots & z_1\cdot a^{n-1} \\ b_{n-1} & z_{n-1} & z_{n-2}\cdot a & \cdots & z_1\cdot a^{n-2} \\ 0 & b & z_{n-2} & \cdots & z_1\cdot a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} z_3 & z_2\cdot a & z_1\cdot a^2 \\ b_2 & z_2 & z_1\cdot a \\ c & b_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n=z_1\cdot\prod_{m=2}^{n}\left(z_m-ab_{m-1}\right)$.

5.05.

$$D_n=\begin{vmatrix} n & a & a & \cdots & a \\ 1 & n-1 & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & a & a \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n=(n-a)\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=\prod_{m=2}^{n}(m-a)$.

5.06.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & a & a^2+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2+b \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+b & ab \\ 0 & a & a^2+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_n=b\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=b^{n-1}$.

5.07.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & b-a^2 & ab & \cdots & 0 \\ 0 & -a & b-a^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a^2 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ -a & b-a^2 & ab \\ 0 & -a & b-a^2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n=b\cdot D_{n-1}$, $D_1=1$, $D_n=b^{n-1}$.

5.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b & \cdots & a+nb \\ a+2b & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+3b & a+2b & a+b & \cdots & a+(n-2)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+nb & a+(n-1)b & a+(n-2)b & \cdots & a+b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+b & a+2b \\ a+3b & a+2b & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = -2b\dfrac{2a+(n+1)b}{2a+nb}D_{n-1}$. $D_1 = a+b$, $D_n = (-1)^{n-1}(2b)^{n-1}\dfrac{2a+(n+1)b}{2}$.

5.09.

$D_n = Det\left(\left| i^2 - j^2 \right|\right)_1^n$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 & \cdots & n^2-1 \\ 3 & 0 & 5 & \cdots & n^2-4 \\ 8 & 5 & 0 & \cdots & n^2-9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = -\dfrac{n^2-1}{n^2-2n}\cdot 2\cdot(2n-1)\cdot D_{n-1}$. $D_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\left(n^2-1\right)\cdot(2n-1)!!$

5.10.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{m-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_3 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_2 \\ b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

\# $D_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1} - b_n\right)\cdot D_{n-1}$, $D_n = a_n\cdot\prod_{m=2}^{n}\left(a_{m-1} - b_m\right)$.

Неоднорідні рекурентні співвідношення першого порядку

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

6.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} r_n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} r_3 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & 1 \\ 1 & 1 & r_1 \end{vmatrix}. \; r_n \neq 1$$

\# $$D_n = \left(\frac{r_1}{r_1 - 1} + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{r_m - 1} \right) \cdot \prod_{m=1}^{n} (r_m - 1).$$

6.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & c_n & c_n & \cdots & c_n \\ b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1} \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & c_3 & c_3 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

\# $$D_n = \prod_{m=2}^{n} (a_m - c_m) \cdot \left(a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k \cdot \prod_{m=1}^{k-1} (a_m - b_m)}{\prod_{m=2}^{k} (a_m - c_m)} \right)..$$

6.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_n = a_n D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} b_m \ . \ D_1 = a_1 + b_1 \ . \ D_n = \prod_{m=1}^{n} a_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} b_m}{\prod_{m=1}^{k} a_m} \right).$$

6.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_2 + b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_n = a_n D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} b_m \ . \ D_1 = a_1 + b_1 \ . \ D_n = \prod_{m=1}^{n} a_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} b_m}{\prod_{m=1}^{k} a_m} \right).$$

6.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + x_n y_n & x_{n-1} y_n & x_{n-2} y_n & \cdots & x_1 y_n \\ x_n y_{n-1} & a_{n-1} + x_{n-1} y_{n-1} & x_{n-2} y_{n-1} & \cdots & x_1 y_{n-1} \\ x_n y_{n-2} & x_{n-1} y_{n-2} & a_{n-2} + x_{n-2} y_{n-2} & \cdots & x_1 y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_{n-1} y_1 & x_{n-2} y_1 & \cdots & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + x_3 y_3 & x_2 y_3 & x_1 y_3 \\ x_3 y_2 & a_2 + x_2 y_2 & x_1 y_2 \\ x_3 y_1 & x_2 y_1 & a_1 + x_1 y_1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_n = a_n D_{n-1} + x_n y_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i \ . \ D_1 = a_1 + x_1 y_1 \ . \ D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{x_m y_m}{a_m} \right) \prod_{i=1}^{n} a_i \ .$$

6.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} z & a & a & \cdots & x \\ a & z & a & \cdots & x \\ a & a & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} z & a & x \\ a & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix}, \ z \neq a, \ az \neq xy \, .$$

\# $D_n = (z-a)D_{n-1} + (z-a)^{n-2}(az - xy)$.

$D_1 = z$. $D_n = (z-a)^{n-1} \cdot \left(z + (n-1) \cdot \dfrac{az - xy}{z - a} \right)$.

6.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_n & a & a & \cdots & x \\ a & z_{n-1} & a & \cdots & x \\ a & a & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} z_3 & a & x \\ a & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix}, \ \begin{matrix} z_i \neq a, i = 2, \cdots, n. \\ az_1 \neq xy. \end{matrix} \, .$$

\# $D_n = (z_n - a)D_{n-1} + (az_1 - xy)\prod_{i=2}^{n-1}(z_i - a)$. $D_1 = z_1$.

$D_n = \prod_{i=2}^{n}(z_i - a) \cdot \left(z_1 + (az_1 - xy) \cdot \sum_{m=2}^{n} \dfrac{1}{z_m - a} \right)$.

6.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} z_{n+1} + z_n & z_n & 0 & \cdots & 0 \\ z_n & z_n + z_{n-1} & z_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & z_{n-1} & z_{n-1} + z_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_2 + z_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} z_4 + z_3 & z_3 & 0 \\ z_3 & z_3 + z_2 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_2 + z_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = z_{n+1} \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} z_m$. $D_1 = z_2 + z_1$. $D_n = \prod_{m=2}^{n} z_{m+1} \cdot \left(z_1 + z_2 + z_1 z_2 \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{z_{k+1}} \right)$.

Система двох рекурентних співвідношень

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

7.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} x+y & x & x \\ y & x+y & x \\ y & y & x+y \end{vmatrix},\ (x\ne y).$$

\# $\begin{cases} D_n = yD_{n-1}+x^n, \\ D_n = xD_{n-1}+y^n. \end{cases}$ $\quad (x-y)D_n = x^{n+1}-y^{n+1}, \quad D_n=\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}.$

7.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a+b & a & y \\ b & a+b & y \\ x & x & z \end{vmatrix},\ (a\ne b).$$

\# $D_n=\dfrac{a^n\cdot(az-xy)-b^n\cdot(bz-xy)}{a-b}.$

7.03.

$$D_n=\begin{vmatrix} z & x & x & \cdots & x \\ y & z & x & \cdots & x \\ y & y & z & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & x \\ y & y & z \end{vmatrix},\ (x\ne y).$$

\# $\begin{cases} D_n=(z-x)\cdot D_{n-1}+x(z-y)^{n-1}, \\ D_n=(z-y)\cdot D_{n-1}+y(z-x)^{n-1}. \end{cases}$ $\quad (x-y)D_n = x(z-y)^n-y(z-x)^n,$

$$D_n=\frac{x(z-y)^n-y(z-x)^n}{x-y}.$$

7.04.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & x & x & \cdots & x \\ y & z_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & z_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} z_3 & x & x \\ y & z_2 & x \\ y & y & z_1 \end{vmatrix}, \ (x\neq y).$$

\# $\begin{cases} D_n=(z_n-x)\cdot D_{n-1}+x\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}(z_m-y), \\ D_n=(z_n-y)\cdot D_{n-1}+y\cdot\prod\limits_{m=1}^{n-1}(z_m-x). \end{cases}$

$$D_n=\frac{x\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}(z_m-y)-y\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}(z_m-x)}{x-y}.$$

7.05.

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} x+y & x & 0 \\ y & x+y & x \\ 0 & y & x+y \end{vmatrix},$$

$(x\neq y)$.

\# $\begin{cases} D_n=yD_{n-1}+x^n, \\ D_n=xD_{n-1}+y^n. \end{cases}$ $\quad (x-y)D_n=x^{n+1}-y^{n+1}, \quad D_n=\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}.$

7.06.

$$D_n=\begin{vmatrix} z_n & a_{n-1}x & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & z_{n-1} & a_{n-2}x & \cdots & a_1x \\ a_ny & a_{n-1}y & z_{n-2} & \cdots & a_1x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_ny & a_{n-1}y & a_{n-2}y & \cdots & z_1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} z_3 & a_2x & a_1x \\ a_3y & z_2 & a_1x \\ a_3y & a_2y & z_1 \end{vmatrix}, \ (x\neq y).$$

\# $D_n=\dfrac{x\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}(z_m-a_my)-y\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}(z_m-a_mx)}{x-y}.$

7.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n x & a_{n-2}b_n x & \cdots & a_1 b_n x \\ a_n b_{n-1} y & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}x & \cdots & a_1 b_{n-1} x \\ a_n b_{n-2} y & a_{n-1}b_{n-2}y & c_{n-2} & \cdots & a_1 b_{n-2} x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 y & a_{n-1} b_1 y & a_{n-2} b_1 y & \cdots & c_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & a_2 b_3 x & a_1 b_3 x \\ a_3 b_2 y & c_2 & a_1 b_2 x \\ a_3 b_1 y & a_2 b_1 y & z_1 \end{vmatrix},$$

$$\# \quad \begin{cases} D_n = (c_n - a_n b_n x)\cdot D_{n-1} + a_n b_n x \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (c_m - a_m b_m y), \\ D_n = (c_n - a_n b_n y)\cdot D_{n-1} + a_n b_n y \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (c_m - a_m b_m x). \end{cases}.$$

$$D_n = \frac{x \cdot \prod_{m=1}^{n} (c_m - a_m b_m y) - y \cdot \prod_{m=1}^{n} (c_m - a_m b_m x)}{x - y}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д. В. Дополнительнительные главы алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : Наука, 1983. — 335 с.

2. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [и др.] / под ред. Ю. Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. — 408 с.

3. Вища математика у прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л. В. Курпи. — Харків: НТУ «ХПІ», 2009. — 532 с.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 547 с.

5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — М. : Наука, 1971. — 280 с.

6. Геворкян Ю. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования: общий курс высшей математики : в 2-х т. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. — Т. 1. — Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. — 652 с.

7. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв'язання : навч.-метод. посібник / Л. П. Дзюбак, С. П. Іглін, Г. Б. Ліннік, І. О. Морачковська. — Харьков : НТУ «ХПИ», 2003. — 240 с.

8. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 1984. — 294 с.

9. Канатников А. Н. Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. — 400 с.

10. Канатников А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. — 378 с.

11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Кураши. — М. : Наука, 1968. — 431 с.

12. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М. : Наука, 1974. — 384 с.

13. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — М. : Наука, 1977. — 307 с.

14. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — М. : Физматгиз, 1963. — 734 с.

15. Чарін В.С. Лінійна алгебра / В. С. Чарін. — Київ : Техніка, 2004. — 415 с.

Навчальне видання

СЕРДЮК Ірина Василівна
АХІЄЗЕР Олена Борисівна
ДУНАЄВСЬКА Ольга Ігорівна

ТЕОРІЯ ВИЗНАЧНИКІВ. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ N-го ПОРЯДКУ

Навчальний посібник
для студентів напрямів підготовки
«Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки»

За загальною редакцією Мітіна Володимира Миколаєвича

Роботу до видання рекомендував М. І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2018р., поз. 121

Підп. до друку _________. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура SchoolBookC. Ум. друк. арк. 16.00.
Наклад 50 прим. Зам. № _________. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач